# Sur la conjecture des $p$-courbures de Grothendieck–Katz et un problème de Dwork

*Yves André*

## Table des matières

**Résumé.** This is a study of the interplay between properties of an integrable algebraic connection in characteristic zero, and properties of its reductions modulo $p$ for large primes $p$ (with special emphasis on the case of connections of geometric origin).

1991 Mathematics Subject Classification: 12H25, 14C99, 14G99, 34M15

# Introduction

**0.1.** Cet article traite des liens entre les propriétés d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$ et celles de ses réductions modulo $p$.

L'origine de cette problématique est une question classique de Fuchs et Schwarz, reprise par Klein dans son livre sur l'icosaèdre : comment reconnaître si toutes les solutions d'une équation différentielle linéaire donnée à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$ sont des fonctions algébriques sur $\mathbb{Q}(x)$ ? Question à laquelle Schwarz a apporté une réponse complète dans le cas particulier des équations hypergéométriques de Gauss, via la classification des triangulations régulières de la sphère. Une approche arithmétique de cette classification a ensuite été inaugurée par Landau [L04][1], qui a mis l'accent sur les dénominateurs des coefficients des solutions formelles.

Dans le cas général, Grothendieck a proposé une réponse "arithmétique" *conjecturale* à cette question : *une équation différentielle linéaire à coefficients dans* $\mathbb{Q}(x)$ *admet une base de solutions algébriques si et seulement si il en est de même par réduction modulo p pour presque tout p*.

Deux aspects remarquables de cette conjecture méritent d'être soulignés d'emblée :

1) une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{F}_p(x)$ admet une base de solutions algébriques si et seulement si elle admet une base de solutions rationnelles, et cela se vérifie par un algorithme très simple : nullité de la $p$-courbure,

2) la conjecture de Grothendieck peut être vue comme une généralisation "différentielle" d'un cas particulier, dû à Kronecker, du théorème de Chebotarev : les racines d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ sont dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si les racines de ses réductions modulo $p$ sont dans $\mathbb{F}_p$ pour presque tout $p$.

**0.2.** Cette conjecture a été étudiée en profondeur et popularisée par N. Katz [38]. Plus récemment [39], il a proposé une *conjecture* plus générale prédisant que la composante neutre du groupe de Galois différentiel est déterminée par les $p$-courbures : plus précisément, *l'algèbre de Lie de sa forme générique, qui est une algèbre de Lie algébrique sur* $\mathbb{Q}(x)$ *et contient modulo presque tout p les p-courbures, est minimale pour cette propriété*. On retrouve la conjecture de Grothendieck comme cas particulier où presque toutes les $p$-courbures sont nulles.

**0.3.** Toujours dans le même esprit, B. Dwork [29] a décrit très précisément le lien entre $p$-courbures et dénominateurs des solutions formelles, dans le cas des équations

[1] référence communiquée par D. Bertrand

“d’origine géométrique” (ou plus généralement, dans le cadre de la théorie des $G$-fonctions). Dans ce cadre, il a posé le *problème* de décrire la *forme de l’ensemble des nombres premiers p pour lesquels la p-courbure s’annule*. Illustrons cela comme dans [29] par deux exemples :

1) L’équation différentielle hypergéométrique de Gauss à paramètres $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (comme chez Schwarz) : les $p$-courbures sont alors nilpotentes pour tout $p$ ne divisant pas le dénominateur commun $N$ de $a, b, c$. Pour analyser leur nullité éventuelle, on ne perd pas de généralité (grâce aux relations de contiguïté) à supposer $a, b, c$ dans $[0, 1[$, $c \neq a, c \neq b$. Alors la $p$-courbure est nulle si et seulement si $p \equiv u^{-1}$ mod. $N$ pour tout unité $u$ de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ telle que les représentants $\langle ua\rangle$, $\langle ub\rangle$, $\langle uc\rangle$ de $ua, ub, uc$ dans $[0, 1[$ vérifient $\langle ua\rangle \geq \langle uc\rangle > \langle ub\rangle$ ou bien $\langle ub\rangle \geq \langle uc\rangle > \langle ua\rangle$[2].

Peut-on s’attendre à ce que, pour des équations différentielles “d’origine géométrique” plus générales, l’ensemble des $p$ pour lesquels la $p$-courbure s’annule ait une densité rationnelle, ou même soit un ensemble “de congruence généralisée” (à un nombre fini d’exceptions près) ? Comme le remarque Dwork, l’exemple suivant montre qu’il convient de prendre des précautions (imposer par exemple une hypothèse de semi-simplicité).

2) L’équation différentielle du logarithme d’une courbe elliptique $X$ définie sur $\mathbb{Q}$ : c’est une équation d’ordre deux provenant d’une équation inhomogène d’ordre 1. La $p$-courbures est nulle si et seulement si $X$ est supersingulière modulo $p$. D’après [31], si $X$ est sans multiplication complexe, cela arrive pour un ensemble infini de $p$ de densité 0 (qui ne peut être un ensemble de congruence généralisé d’après Chebotarev).

**0.4.** Le présent article est consacré à l’étude de la conjecture de Grothendieck–Katz et au problème de Dwork, dans le cadre plus général des connexions intégrables sur une variété lisse géométriquement connexe $S$ sur un corps $k$ *de caractéristique nulle*. Il comprend trois chapitres. Les résultats principaux se trouvent aux paragraphes 4, 7, et 16.2.

**0.5.** Le leitmotiv du premier chapitre (et en partie aussi du troisième) est que dans l’étude de ces questions, il y a intérêt à remplacer le module à connexion intégrable donné $\mathcal{M}$ par un autre, $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$, qui possède en outre un crochet de Lie horizontal, et dont les fibres sont les algèbres de Lie des groupes de Galois différentiels attachés aux points-base correspondants.

**0.5.1 Théorème** (*cf.* 4.3.1). *$\mathcal{M}$ vérifie la conjecture de Katz si et seulement si tout quotient de Lie simple non-abélien de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ (dans la catégorie des modules à connexion) a une infinité de p-courbures non nulles.*

Nous nous ramènerons au cas particulier suivant : si l’algèbre de Lie de Galois différentielle est résoluble (de sorte qu’il n’y a aucun quotient de Lie simple non-abélien), $\mathcal{M}$ vérifie la conjecture de Katz. Ce cas particulier figurait déjà dans [2] et [3]

[2] Katz [38] a vérifié que cette condition est satisfaite pour presque tout $p$ si et seulement si $(a, b, c)$ est dans la liste de Schwarz, ce qui prouve la conjecture de Grothendieck dans ce cas

(dans le cas où $k$ est un corps de nombres), en généralisant un résultat de Chudnovsky [18]. Nous présenterons une variante raffinée de l'argument de [3] tenant compte de résultats plus récents en théorie des $G$-fonctions, et basé sur un avatar du critère de rationalité de Borel–Dwork.

**0.6.** Dans ces questions, la réduction d'un corps de base $k$ quelconque de caractéristique nulle à un corps de nombres n'est pas formelle. Ce qui est en jeu, c'est un analogue de la conjecture de Grothendieck en équicaractéristique nulle, traité au second chapitre :

**0.6.1 Théorème** (*cf.* 7.2.2). *Dans une famille de connexions intégrables $(\mathcal{M}_{(t)})_{t\in T}$ paramétrée par une $k$-variété $T$, si $\mathcal{M}_{(t)}$ est isotriviale pour tout point* fermé *$t$ de $T$, alors il en est de même de la fibre générique $\mathcal{M}_{(\eta)}$.*

Rappelons qu'"isotrivial" veut dire trivialisé par un revêtement fini étale de la base. La difficulté est bien entendu de "borner" les groupes de Galois différentiels finis qui interviennent. Nous prouvons cet énoncé en utilisant les espaces de modules de connexions construits par C. Simpson, par un argument dont la clé est le théorème classique de Jordan sur les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n$.

Dans un manuscrit récent [34], E. Hrushovsky prouve un énoncé de ce type au moyen de la théorie des modèles.

**0.7.** Le troisième chapitre traite de la conjecture de Grothendieck–Katz et du problème de Dwork dans le cas d'une connexion d'origine géométrique $\mathcal{M}$, c'est à dire telle qu'il existe $S' \to S$ étale dominant tel que $\mathcal{M}_{S'}$ soit extension successive de sous-quotients de connexions de Gauss–Manin attachées à des morphismes lisses $f$ de but $S'$.

Rappelons que dans le cas des connexions de Gauss–Manin (et de certains facteurs directs très particuliers), la conjecture de Grothendieck a été prouvée par Katz [38]. Sa méthode repose sur une formule remarquable reliant la $p$-courbure à l'application de Kodaira–Spencer.

Pour aborder la conjecture de Katz, nous mettons à profit le théorème 0.5.1 qui nous ramène à prouver la conjecture de Grothendieck pour les quotients simples de l'algèbre de Lie de Galois différentielle. Ceux-ci sont de nature "motivique", ce qui permet d'utiliser la formule de Katz. Toutefois, en raison d'une lacune actuelle de la théorie motivique, nous n'obtenons de résultat définitif que sous une hypothèse technique de connexité (conjecturalement toujours satisfaite) :

**0.7.1 Théorème** (*cf.* 16.2.1 et corollaires). *Soit un morphisme projectif lisse $f : X \to S$, de base $S$ une $k$-variété lisse géométriquement connexe. Supposons que le groupe de Galois motivique*[3] *d'au moins une fibre géométrique de $f$ soit connexe. Soit $\mathcal{H}_f$ la connexion de Gauss–Manin attachée à $f$, et soit $\mathcal{M}$ un module à connexion sous-quotient d'une construction tensorielle sur $\mathcal{H}_f$. Alors :*

1) *$\mathcal{M}$ vérifie la conjecture de Katz,*

2) *Il existe un corps de nombres totalement réel $E$ galoisien sur $\mathbb{Q}$ (ne dépendant que de $f$), et un ensemble $C(\mathcal{M})$ de classes de conjugaison de* $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, *tels que*

[3] voir 12.2 pour la définition

*l'ensemble des $p$ tels que les $p$-courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent soit égal, à un nombre fini d'exceptions près, à l'ensemble des $p$ tels que la classe de conjugaison de Frobenius en $p$ soit dans $C(\mathcal{M})$. En particulier, cet ensemble a une densité rationnelle.*

Le point 2) répond affirmativement, dans ce cas particulier, à la question de Dwork. Le mystérieux corps $E$ apparaît comme clôture galoisienne d'un corps d'endomorphismes de motifs. Dans l'exemple hypergéométrique 0.3 1), c'est $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{N})$.

Nous discutons brièvement en appendice d'une application intéressante de la conjecture de Grothendieck à la classification des théories des champs conformes : le problème de l'"algébricité" des blocs conformes dans les théories rationnelles.

**0.8.** Cet article est une version élaguée, corrigée, et entièrement réécrite du manuscrit [7]. Nous remercions D. Bertrand, J.-B. Bost, A. Chambert-Loir et L. Di Vizio de nous avoir encouragé, à maintes reprises, à entreprendre cette révision. Nous remercions aussi le referee de sa lecture vigilante.

Si l'article est directement inspiré par les travaux de N. Katz [38] [39] et (dans une moindre mesure) de D. et G. Chudnovsky [18], les travaux de B. Dwork touchent aussi par bien des points aux thèmes abordés ici : critère de Borel–Dwork, $p$-courbures et taille des $G$-connexions [29], lieu de nilpotence des $p$-courbures [28], structures de Frobenius, et bien sûr le problème auquel le titre fait allusion. Quant à l'appendice, il est né d'une conversation avec C. Itzykson, qui nous a fait découvrir la classification A.D.E.

# I La propriété de Grothendieck–Katz. Application d'un critère d'algébricité

## 1 L'algèbre de Lie de Galois différentielle

**1.1.** Soit $S$ une variété algébrique lisse géométriquement connexe sur un corps $k$. Soit $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ la donnée d'un $\mathcal{O}_S$-module $M$ localement libre de rang $r < \infty$ et d'une connexion intégrable

$$\nabla : M \to \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} M.$$

Sur un ouvert $U \subset S$ où $M$ est libre, fixons des coordonnées locales $x_1, \dots, x_d$, et une base $e_1, \dots, e_r$ de $M(U)$. Notons $A_{(h)}$ la "matrice" de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_h}}$ dans cette base :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_h}}(e_j) = \sum_i A_{(h)ij} e_i,$$

de sorte que $\nabla(e_i) = \sum_{h,i} dx_h \otimes A_{(h)ij} e_i$.

**1.2.** On peut aussi exprimer la situation en termes de *solutions* de $\mathcal{M}$ à valeurs dans une extension différentielle $R$ de $\mathcal{O}(U)$ ad libitum (par exemple un anneau de série formelles, complété de l'anneau local en un point de $U$) ; par "solution", nous entendons un homomorphisme $\mathcal{O}(U)$-linéaire commutant à la connexion.

Voici le dictionnaire. On sait que dans la base duale $e_1^\vee, \dots, e_r^\vee$, la connexion duale $\nabla^\vee$ contractée par $\frac{\partial}{\partial x_h}$ est représentée par $-{}^t A_{(h)}$. Écrivons alors notre solution $y$ sous la forme $\sum y_j\, e_j^\vee$ où $y_j \in R$. La condition d'horizontalité

$$\nabla^\vee(y) = 0$$

se traduit alors par le système linéaire intégrable aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_h} = \sum_i y_i\, A_{(h)ij},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\vec{y} = \vec{y}\, A_{(h)},$$

en notant $\vec{y}$ le vecteur-ligne de composantes $y_i$.

**1.2.1 Remarque.** Cette façon, chère à B. Dwork, d'écrire les systèmes différentiels matriciels "à droite" semble plus naturelle que l'écriture "à gauche" (elle fait l'économie d'une transposition - ou d'un signe, si l'on compare à la connexion duale). Elle présente d'autre part l'avantage, dans la situation complexe, d'être compatible avec l'écriture à gauche usuelle de la monodromie.

**1.3.** Supposons car $k = 0$. Les modules cohérents à connexion intégrable sur $S$ forment une catégorie tannakienne $MIC_S$ sur $k$. À partir d'un module à connexion intégrable $\mathcal{M}$, on peut former ses puissances tensorielles mixtes $T_n^m\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\otimes m} \otimes (\mathcal{M}^\vee)^{\otimes n}$. Les sous-quotients des sommes finies de $T_n^m\mathcal{M}$ (pour divers $m, n$) forment une sous-catégorie tannakienne de $MIC_S$, notée $\langle\mathcal{M}\rangle^\otimes$.

Tout point $s$ de $S$ définit un foncteur fibre

$$\omega_{\mathcal{M},s} : \langle\mathcal{M}\rangle^\otimes \to \mathrm{Vec}_{\kappa(s)}$$

à valeurs dans les vectoriels sur le corps de définition de $s$. On pose

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s) := \mathrm{Aut}^\otimes \omega_{\mathcal{M},s}.$$

C'est un $\kappa(s)$-schéma en groupe affine, appelé groupe de Galois différentiel de $\mathcal{M}$, basé en $s$ ([40], [8]). Si $s$ est un point $k$-rationnel de $S$, *i.e.* si $\kappa(s) = k$, ce groupe peut se décrire à la Picard–Vessiot–Kolchin, et $\omega_{\mathcal{M},s}$ s'enrichit en une équivalence de catégories

$$\langle\mathcal{M}\rangle^\otimes \cong \mathrm{Rep}_k \mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s).$$

Si $s = \eta$ est le point générique, $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s)$ coïncide avec le groupe de Galois "générique" ou "intrinsèque" considéré dans [39] (voir aussi [14]) : il se décrit comme stabilisateur dans $\mathrm{GL}(M_\eta)$ des fibres génériques des sous-objets des sommes finies de $T_n^m\mathcal{M}$ (*cf.* [8, 3.2.2]).

**1.3.1 Remarque.** D'après [40, 1.3.2], la formation de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s)$ commute à l'extension des scalaires $k'/k$.

**1.4.** Par ailleurs, on peut considérer le foncteur oubli de la connexion :

$$\omega_{\mathcal{M}} : \langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes} \to \mathrm{FibVec}_S$$

à valeurs dans les fibrés vectoriels sur $S$. On pose

$$\mathcal{G}(\mathcal{M}) := \mathrm{Aut}^{\otimes} \omega_{\mathcal{M}}.$$

C'est un $S$-schéma en groupe affine et plat, *loc. cit.*. Sa fibre en $s$ n'est autre que $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s)$. Compte tenu du fait que pour tout objet $\mathcal{N} = (N, \nabla) \in \langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ et tout sous-objet $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$, le fibré vectoriel sous-jacent $N'$ est localement facteur direct de $N$, on montre aisément que $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est le sous-schéma en groupe fermé de $\mathrm{GL}(M)$ qui stabilise les (fibrés vectoriels sous-jacents aux) sous-objets des sommes finies de $T_n^m \mathcal{M}$ (voir [22, II.1.3.6] pour la définition d'un tel stabilisateur ; voir aussi [8, 2.1]). En prenant des puissances extérieures à la Chevalley, on montre en fait que $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est le stabilisateur dans $\mathrm{GL}(M)$ d'un sous-objet $\mathcal{D}$ de rang un dans une somme finie convenable $\oplus T_n^m \mathcal{M}$.

Nous n'aurons à considérer que son algèbre de Lie

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) := \mathrm{Lie}\, \mathcal{G}(\mathcal{M}),$$

qui est un objet de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$, que nous appellerons *algèbre de Lie*[4] *de Galois différentielle de* $\mathcal{M}$. Pour un point quelconque $s \in S$, $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est l'unique sous-objet de $T_1^1 \mathcal{M} = \underline{\mathrm{End}} \mathcal{M}$ ("End interne") de fibre en $s$ égale à $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, s) \subset \mathrm{End} M_s$. Elle peut aussi se décrire comme la sous-algèbre de Lie maximale de $\mathfrak{gl}(M)$ qui stabilise les (fibrés vectoriels sous-jacents aux) sous-objets des sommes finies de $T_n^m \mathcal{M}$ (*resp.* qui stabilise $D$).

Bien entendu, il n'est pas vrai, réciproquement, que tout sous-fibré d'un $\oplus T_n^m M$ stabilisé par $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ soit horizontal, *i.e.* sous-jacent à un sous-objet de $\oplus T_n^m \mathcal{M}$ (heuristiquement : l'horizontalité est une propriété $k$-linéaire, et non $\mathcal{O}_S$-linéaire).

**1.4.1 Lemme.** 1) *Pour tout objet $\mathcal{M}'$ de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$, on a un épimorphisme canonique $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) \twoheadrightarrow \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}')$.*

2) *Si* $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ *est semi-simple, l'épimorphisme $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) \twoheadrightarrow \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}))$ est un isomorphisme.*

*Démonstration*. Puisqu'on a affaire à des objets de $MIC_S$, il suffit de le vérifier sur une fibre. Par la théorie tannakienne, on a un épimorphisme canonique $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s)\mathrm{Gal}(\mathcal{M}', s)$, d'où 1). Pour 2), on remarque que $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s) \to \mathrm{Gal}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}), s) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, s))$ n'est autre que la représentation adjointe, qui induit un isomorphisme $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, s) \to \mathrm{LieGal}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}), s)$ puisque $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, s)$ est semi-simple. □

[4] on trouvera plus bas (14.3) une discussion des algèbres de Lie dans une catégorie tannakienne

**1.4.2 Lemme.** *La formation de $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$ est compatible aux changements de base dominants.*

*Démonstration.* Soient $X$ une autre $k$-variété lisse géométriquement connexe, et $f : X \to S$ un morphisme dominant. Il suffit de prouver la propriété en la fibre générique, donc de montrer que $f^*(\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta_S)) = \mathrm{LieGal}(f^*\mathcal{M}, \eta_X)$. On a l'inclusion $\mathrm{Gal}(f^*\mathcal{M}, \eta_X) \subset f^*\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \eta_S)$ (ce dernier étant le stabilisateur des images inverses sur $X$ des sous-objets des $\oplus T_n^m \mathcal{M}$), et il suffit de montrer qu'on a l'égalité des composantes neutres.

Comme l'énoncé ne dépend de $f$ que via l'extension de corps $k(X)/k(S)$, on se ramène à traiter d'une part le cas d'un morphisme étale (qui est clair), et d'autre part le cas d'une projection $X = S \times S' \to S$. Par la remarque 1.3.1, on peut d'ailleurs supposer que $S'$ possède un point $k$-rationnel, d'où une rétraction $i$ de $f$. Comme les suites exactes courtes dans la catégorie tannakienne $\langle f^*\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ sont localement scindées eu égard aux fibrés sous-jacents, l'endofoncteur idempotent $(i \circ f)^*$ de $\langle f^*\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est exact, donc finalement égal à l'identité puisque $(i \circ f)^*\mathcal{M} = \mathcal{M}$. Il s'ensuit que $f^* : \langle \mathcal{M}\rangle^{\otimes} \to \langle f^*\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est une équivalence de catégories, ce qui implique que $\mathrm{Gal}(f^*\mathcal{M}, \eta_X) = f^*\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \eta_S)$ dans ce cas. □

**1.4.3 Lemme.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{LG}(\mathcal{M}) = 0$,

b) *pour tout $s \in S$,* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s)$ *est fini,*

c) *localement pour la topologie étale, $M$ est engendré par ses sections horizontales,*

d) *$\mathcal{M}$ est isotrivial, i.e. il existe un revêtement étale fini $S' \to S$ au-dessus duquel $\mathcal{M}$ devient trivial* (*en tant que module à connexion*).

*Démonstration.* Comme la fibre de $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$ en $s$ s'identifie à $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, s)$, l'équivalence de a) et b) est claire. Celle de c) et d) est laissée au lecteur, de même que l'implication c) $\Longrightarrow$ b) (qui est d'ailleurs un cas particulier du lemme précédent). L'implication b) $\Longrightarrow$ c) découle de la théorie de Galois différentielle[5] : en effet, on peut remplacer $k$ par une extension finie et $S$ par un voisinage affine Spec $A$ d'un point $k$-rationnel $s$ de $S$ ; alors le torseur $\mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_{\mathcal{M}}, \omega_{\mathcal{M},s} \otimes_k S)$ sous $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s) \otimes_k S$ est un $S$-schéma fini étale (tout comme $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s) \otimes_k S$), et l'image inverse de $\mathcal{M}$ sur ce torseur est triviale, *cf.* [8, 3.4.2].

**1.5.** Nous aurons besoin de la notion de "radical de $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$". C'est l'unique sous-objet $\mathrm{Rad}\mathcal{LG}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$ dont la fibre en un point $s$ (ou en tout point $s$) est le radical de $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, s)$ (noter que ce dernier est un idéal $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s)$-invariant). C'est donc automatiquement un idéal de Lie de $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$.

---

[5] dans [39] on trouve un argument beaucoup plus indirect utilisant à la fois le passage à la caractéristique $p$ et l'équivalence de Riemann–Hilbert

# 2 $p$-courbures

**2.1.** Supposons maintenant que car $k = p > 0$.

Alors les constantes différentielles ne se réduisent plus au corps de base $k$, mais forment le sous-faisceau $k.(\mathcal{O}_S)^p$ de $\mathcal{O}_S$.

Un autre fait nouveau est que Der $\mathcal{O}_S = (\Omega^1_S)^\vee$ est muni d'une $p$-structure, ce qui permet de définir l'opérateur de *p-courbure* $R_{\mathcal{M},p}$ : pour toute section $\partial$ de $(\Omega^1_S)^\vee$ au-dessus d'un ouvert $U$,

$$R_{\mathcal{M},p}(\partial) = (\nabla_\partial)^p - \nabla_{\partial^p}\,.$$

$R_{\mathcal{M},p}(\partial)$ est un endomorphisme $\mathcal{O}(U)$-linéaire de $M(U)$, additif et $p$-linéaire en la dérivation $\partial$ [37] ; autrement dit, $R_p = R_{\mathcal{M},p}$ définit une section globale de $F_S^*\Omega^1_S \otimes \underline{\mathrm{End}}M$, où $F_S$ désigne l'endomorphisme de Frobenius de $S$.

**2.2.** Écrivons la connexion sous forme matricielle comme en 1.2, en remplaçant l'indice $(h)$ par le $d$-uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf la $h$-ième qui vaut 1.

Par dérivations “formelles” successives du système

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\,\vec{y} = \vec{y}\,A_{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)},$$

on obtient des équations

$$\frac{\partial^m}{\partial \underline{x}^{\underline{m}}}\,\vec{y} = \vec{y}\,A^{[\underline{m}]}$$

pour tout multi-indice $\underline{m}$ à $d$ composantes (avec les conventions usuelles sur les multi-indices). La $p$-courbure $R_{\mathcal{M},p}(\frac{\partial}{\partial x_h})$ est alors représentée par la matrice $A^{[(0,\dots,0,p,0,\dots,0)]}$ ($p$ en $h$-ème position).

**2.3.** Une autre particularité de la caractéristique $p$ est qu'on dispose d'un moyen algorithmique simple de détecter si une connexion intégrable est Zariski-localement triviale : un théorème de P. Cartier affirme en effet que *$M$ est engendré sur $\mathcal{O}_S$ par $M^\nabla :=$* Ker $\nabla$ *si et seulement si l'opérateur de $p$-courbure $R_{\mathcal{M},p}$ est nul* (*cf.* [37]).

En particulier, cette propriété est locale pour la topologie étale sur $S$, ce qui contraste fortement avec le cas de caractéristique nulle.

**2.4.** La théorie de Galois différentielle en caractéristique $p$ est décrite, sous deux points de vue différents (générique et local, respectivement), dans [50] et dans [8, 3.2.2.5]. Dans [50], on montre que la catégorie $\langle \mathcal{M}_\eta\rangle^\otimes$ est tannakienne neutre sur $k.(k(S))^p$ ; le groupe tannakien est infinitésimal abélien de hauteur 1, et de $p$-algèbre de Lie engendrée par les $p$-courbures $R_{\mathcal{M},p}(\partial)$.

Dans [8], on choisit un point $s \in S(k)$ (supposé exister), et on remplace $S$ par le schéma local non réduit $S_{s,p} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{S,s}/(\mathfrak{m}_{S,s})^p$, où $\mathfrak{m}_{S,s}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,s}$, de sorte que l'anneau des constantes différentielles redevienne $k$. On a un foncteur fibre

$$\omega_{\mathcal{M},s,p} : \langle \mathcal{M}_{S_{s,p}} \rangle^{\otimes} \to \mathrm{Vec}_k$$

donné par $N \mapsto (N \otimes \mathcal{O}^{pd}_{S_{s,p}})^{\nabla}$ où $\mathcal{O}^{pd}_{S_{s,p}}$ est le complété à puissances divisées de $\mathcal{O}_{S_{s,p}}$.

Le $k$-groupe affine $\mathrm{Aut}^{\otimes}\omega_{\mathcal{M},s,p}$ est infinitésimal abélien de hauteur 1, et de $p$-algèbre de Lie engendrée sur $k$ par les $p$-courbures $R_{\mathcal{M},p}(\partial)$.

Par ailleurs, on peut considérer comme plus haut le foncteur oubli de la connexion :

$$\omega_{\mathcal{M}_{S_{s,p}}} : \langle \mathcal{M}_{S_{s,p}} \rangle^{\otimes} \to \mathrm{FibVec}_{S_{s,p}}.$$

Le $S_{s,p}$-schéma en groupe $\mathrm{Aut}^{\otimes}\omega_{\mathcal{M}}$ est en fait constant :

$$\mathrm{Aut}^{\otimes}\omega_{\mathcal{M}} \cong (\mathrm{Aut}^{\otimes}\omega_{\mathcal{M},s,p}) \otimes_k S_{s,p},$$

*cf.* [8, 3.2.2.6]. Sa $p$-algèbre de Lie, qui est un objet de $\langle \mathcal{M}_{S_{s,p}} \rangle^{\otimes}$, est donc engendrée (en tant que $p$-algèbre de Lie) par les $R_{\mathcal{M},p}(\partial)$.

## 3 L'algèbre de Lie des $p$-courbures

**3.1.** Revenons au cas d'un corps de base $k$ de caractéristique nulle. Comme dans [37] et [39], "épaississons" la situation en choisissant un sous-anneau $\mathfrak{o}$ de $k$ de type fini sur $\mathbb{Z}$, un $\mathfrak{o}$-schéma connexe $\mathfrak{S}$ à fibres géométriquement connexes, et un $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$-module localement libre à connexion intégrable $\mathfrak{M}$, tels que $S$ et $\mathcal{M}$ se déduisent de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{M}$ par extension des scalaires $\mathfrak{o} \hookrightarrow k$.

On suppose aussi que l'objet $\mathcal{D}$ de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ considéré en 1.3.1 provient d'un sous-objet $\mathfrak{D}$ de $\oplus\, T^m_n\mathfrak{M}$, et que le fibré sous-jacent à $\mathfrak{D}$ est localement facteur direct.

Dans ces conditions, $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ provient d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{L}\mathfrak{G}(\mathfrak{M})$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ (le stabilisateur de $\mathfrak{D}$), dont la fibre en tout point fermé $v$ de Spec $\mathfrak{o}$ contient les $p$-courbures $R_{\mathfrak{M}\otimes\kappa(v),p}(\partial)$ de la fibre de $\mathfrak{M}$ en $v$ (ici $p$ désigne la caractéristique résiduelle de $v$), *cf.* [39, 9.3]. On notera que tous les nombres premiers sauf un nombre fini interviennent ici.

Comme dans *loc. cit.*, nous dirons abusivement que "LieGal$(\mathcal{M}, \eta)$ contient les $p$-courbures modulo presque tout $p$".

**3.1.1 Remarque.** On appellera parfois abusivement *$v$-courbures de $\mathcal{M}$* les $R_{\mathfrak{M}\otimes\kappa(v),p}(\partial)$ (surtout lorsque $k$ est un corps de nombres). Elles dépendent bien sûr de $\mathfrak{o}$ et des modèles, mais cette dépendance est "innocente" : étant donné deux ensembles de données $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{D}_1)$ et $(\mathfrak{o}_2, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{D}_2)$, il en existe un troisième $(\mathfrak{o}_3, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{D}_3)$ tel que $\mathfrak{o}_3$ contienne $\mathfrak{o}_1$ et $\mathfrak{o}_2$, et que $(\mathfrak{S}_3, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{D}_3)$ s'obtienne à partir de $(\mathfrak{S}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{D}_i)$ par extension des scalaires $\mathfrak{o}_i \hookrightarrow \mathfrak{o}_3$, $i = 1, 2$.

On a par ailleurs $\mathfrak{o}_i \otimes \mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathfrak{o}_3 \otimes \mathbb{F}_p$, $i = 1, 2$, pour presque tout $p$, *cf.* [39, 6.1].

**3.2.** Soit $\boldsymbol{P}$ un ensemble de nombres premiers, et soit $\mathcal{L} \subset \mathfrak{gl}(M_\eta)$ une sous-algèbre de Lie. Nous dirons que $\mathcal{L}$ *contient les $p$-courbures modulo presque tout $p \in \boldsymbol{P}$* si pour un choix (ou pour tout choix - cela revient au même par la remarque ci-dessus) de données $(\mathfrak{o}, \mathfrak{S}, \mathfrak{M}, \mathfrak{D})$ comme ci-dessus et d'une $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$-sous-algèbre de Lie $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ étendant $L$, et pour tout $p \in \boldsymbol{P}$ sauf un nombre fini, la fibre de $\mathfrak{L}$ en tout point fermé $v$ de Spec $\mathfrak{o}$ de caractéristique résiduelle $p$ contient les $p$-courbures $R_{\mathfrak{M}\otimes\kappa(v),p}(\partial)$ de la fibre de $\mathfrak{M}$ en $v$.

De même, si $F \subset N = \oplus T_n^m M$ est un sous-fibré localement facteur direct d'une somme finie de puissances tensorielles mixtes sur $M$, nous dirons que $F$ *est stable sous les $p$-courbures modulo presque tout $p \in \boldsymbol{P}$* si pour un choix (ou pour tout choix) de données $(\mathfrak{o}, \mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ comme ci-dessus et d'un sous-fibré $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{N} = \oplus T_n^m \mathfrak{M}$ localement facteur direct étendant $F$, et pour tout $p \in \boldsymbol{P}$ sauf un nombre fini, la fibre de $\mathfrak{F}$ en tout point fermé $v$ de Spec $\mathfrak{o}$ de caractéristique résiduelle $p$ est stable sous les $p$-courbures $R_{\mathfrak{N}\otimes\kappa(v),p}(\partial)$ de la fibre de $\mathfrak{N}$ en $v$.

Nous appellerons *algèbre de Lie des $\boldsymbol{P}$-courbures de $\mathcal{M}$* et noterons $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(M_\eta)$ “contenant les $p$-courbures modulo presque tout $p \in \boldsymbol{P}$”.

**3.2.1 Proposition.** *$\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ est fibre générique d'un unique sous-module horizontal de $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$ (noté $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$).*

**3.2.2 Corollaire.** *$\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ est un idéal de Lie de $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$.*

*Démonstration.* Il suffit de faire voir que $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ est un sous-$k(S)$-espace horizontal de $T_1^1 M_\eta$. Par le lemme de Chevalley, $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ peut se décrire comme la sous-algèbre de Lie de End$M_\eta$ qui stabilise une certaine droite $D'_\eta$ dans un espace de tenseurs mixtes sur $M_\eta$. Soit $N_\eta$ le plus petit sous-$k(S)$-espace horizontal de $M_\eta$ contenant $D'_\eta$. Ainsi $N_\eta$ est la fibre générique d'un objet $\mathcal{N}$ de $\langle\mathcal{M}\rangle^\otimes$, et quitte à remplacer $S$ par un ouvert dense, $D'_\eta$ est la fibre générique d'un fibré en droite $D'$ localement facteur direct de $N$. Alors $D'$ est stable sous les $p$-courbures modulo presque tout $p \in \boldsymbol{P}$. Bien plus, l'argument de [K82]10.2, basé sur l'horizontalité des $p$-courbures, montre que les $p$-courbures agissent par multiplication par une fonction à dérivée nulle sur $N$ modulo presque tout $p \in \boldsymbol{P}$. Ceci entraîne que le sous-espace $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ de End$M_\eta$ est formé des éléments qui agissent par homothéties sur $N_\eta$ (en d'autres termes, on a $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta) = \mathrm{Ker}(\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta) \to \mathrm{End}(\mathrm{End}(N_\eta))))$. Il est alors clair que ce sous-espace est stable sous les $\nabla(\partial)$. □

**3.2.3 Remarque.** L'idéal $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ croît avec $\boldsymbol{P}$, et si $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{P}'$ sont deux ensembles de nombres premiers, on a $(\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{P}')\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) + \boldsymbol{P}'\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$.

**3.2.4 Lemme.** 1) *Pour tout objet $\mathcal{M}'$ de $\langle\mathcal{M}\rangle^\otimes$, l'épimorphisme canonique $\mathcal{LG}(\mathcal{M}) \twoheadrightarrow \mathcal{LG}(\mathcal{M}')$ induit un épimorphisme $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}')$.*

2) *Si* $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ *est semi-simple, alors l'homomorphisme*

$$\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}))$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration*. Par 3.2.1, il suffit de le vérifier sur les fibres génériques.

1) Il est immédiat que $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}', \eta)$ est contenue dans l'image de $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$. Réciproquement, il est clair que l'image inverse de $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}', \eta)$ dans $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}, \eta)$ contient les $p$-courbures modulo presque tout $p \in \mathbf{P}$.

2) découle de 1) (surjectivité) et de 1.4.1 (injectivité). □

**3.2.5 Remarque.** En général $\mathfrak{o} \otimes \mathbb{F}_p$ n'est pas connexe, et on peut vouloir préciser la composante connexe des points $v$ dont les $v$-courbures nous intéressent. Par exemple, si la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$ contient un corps de nombres $E$, on peut introduire des variantes de $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ en considérant les $v$-courbures pour tout $v$ au-dessus d'un ensemble fixé $\boldsymbol{P}_E$ de places finies de $E$ (à un ensemble fini près). Ces variantes $\boldsymbol{P}_E\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ vérifient les mêmes propriétés 3.2.1 à 3.2.4. Elles nous seront utiles en 16.2.1.

**3.2.6 Lemme.** *La formation de* $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ *est compatible aux changements de base dominants.*

*Démonstration*. On raisonne comme dans la preuve du lemme 1.4.2, dont on reprend les notations. Il suffit de montrer que $f^*(\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta_S)) = \boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(f^*\mathcal{M}, \eta_X)$. On a l'inclusion $\supset$, en raison de la formule de changement de base pour les $p$-courbures (O. Gabber, *cf.* [39, app.]). L'inclusion opposée se démontre exactement comme dans *loc. cit.*. □

**3.2.7 Proposition** ([37]). *Supposons que* $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$.

1) *Si* $\boldsymbol{P}$ *est infini, alors* $\mathcal{M}$ *est régulier* (*i.e. à singularités régulières "à l'infini"*).

2) *Si en outre* $\boldsymbol{P}$ *est de densité* 1*, alors il existe un revêtement fini étale* $S' \to S$ *tel* $\mathcal{M}_{S'}$ *s'étende en un module à connexion sur toute compactification lisse* $\bar{S}'$ *telle que* $\bar{S}' \setminus \bar{S}$ *soit un diviseur à croisements normaux.*

**3.3.** Si $\mathcal{M}$ est isotrivial (*i.e.* s'il existe un revêtement étale fini $S' \to S$ au-dessus duquel $\mathcal{M}$ devient trivial), on a $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) = 0$, d'où $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{P}$.

La *conjecture de Grothendieck* prédit la réciproque :

**3.3.1 Conjecture.** *Soit* $\boldsymbol{P}$ *l'ensemble des nombres premiers. Si* $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$*, alors* $\mathcal{M}$ *est isotrivial.*

**3.3.2 Remarque.** Par 3.2.7.2, on peut supposer dans cette conjecture que $S$ est projectif (en passant à une compactification d'un revêtement fini étale convenable).

Compte tenu du théorème de Cartier, *cf.* 2.3, il est facile de voir que cette conjecture s'exprime aussi comme suit, en prenant un modèle $(\mathfrak{o}, \mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ de $(k, S, \mathcal{M})$ comme en 3.1 (l'énoncé ne dépend pas du choix du modèle) :

**3.3.3 Conjecture** (équivalente). *Si pour tout point fermé $v$ d'un ouvert dense de* Spec $\mathfrak{o}$, *la fibre de $\mathfrak{M}$ en $v$ est (iso)triviale*[6]*, alors $\mathcal{M}$ est isotrivial.*

Cette conjecture est encore largement ouverte (en revanche, un analogue pour les équations aux $q$-différences est démontré dans [25]).

## 4 La propriété de Grothendieck–Katz

Dans tout ce paragraphe, $\boldsymbol{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

**4.1.** Dans [39], Katz conjecture que pour tout module à connexion intégrable sur $S$, la *plus petite* sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ qui contient les $p$-courbures pour presque tout $p$ est $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ elle-même. Dans le langage précédent, cela se traduit alors par :

**4.1.1 Conjecture.** *Pour tout $\mathcal{M} \in MIC_S$, $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \mathcal{LG}(\mathcal{M})$.*

Cette conjecture entraîne, via 1.4.3, la précédente (cas où $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$). Réciproquement :

**4.1.2 Proposition** ([39]). $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \mathcal{LG}(\mathcal{M}) \iff$ *tout objet de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ vérifie* 3.3.1.

**4.2.** Dans la suite, nous dirons que *$\mathcal{M}$ a la propriété de Grothendieck–Katz* si $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \mathcal{LG}(\mathcal{M})$.

**4.2.1 Lemme.** *La propriété de Grothendieck–Katz est stable par changement de base dominant.*

Cela découle de 1.4.2 et 3.2.6. Nous ignorons en revanche si la propriété de Grothendieck–Katz est stable par restriction à un fermé (lisse géométriquement connexe).

L'étude de la stabilité de la propriété de Grothendieck–Katz par images directes supérieures (cohomologie de de Rham à coefficients) est délicate, et ne sera abordée au chapitre III que dans le cas de la connexion triviale (cohomologie de de Rham à coefficients constants).

[6] rappelons que "trivial" équivaut à "isotrivial" en caractéristique $p > 0$

**4.3.** L'énoncé suivante précise 4.1.2 :

**4.3.1 Théorème.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathcal{M}$ *a la propriété de Grothendieck–Katz,*

2) *Pour toute algèbre de Lie simple non-abélienne* $\mathcal{L}$ *dans* $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ *qui est quotient de* $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$ *par un idéal de Lie, on a* $\boldsymbol{P}$-$\mathcal{C}(\mathcal{L}) \neq 0$.

**4.3.2 Corollaire.** $\mathcal{M}$ *a la propriété de Grothendieck–Katz si et seulement s'il en est de même de son semi-simplifié* $\mathcal{M}^{ss}$.

En effet, la théorie de Galois différentielle montre que $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$ est extension de $\mathcal{LG}(\mathcal{M}^{ss})$ par un idéal nilpotent, donc $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$ et $\mathcal{LG}(\mathcal{M}^{ss})$ ont mêmes quotients simples (non abéliens).

**4.3.3 Corollaire.** *La sous-catégorie pleine de* $MIC_S$ *formée des objets ayant la propriété de Grothendieck–Katz est tannakienne et stable par extension.*

Le fait qu'elle soit tannakienne est clair, compte tenu de 3.2.4. Qu'elle soit stable par extension découle du corollaire précédent.

Un cas très particulier, qui résout une question posée dans [45, 2.5], est le suivant :

**4.3.4 Corollaire.** *Supposons que* $\mathcal{N} \in MIC_S$ *s'inscrive dans une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{N}' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}'' \to 0$$

*où* $\mathcal{N}'$ *et* $\mathcal{N}''$ *sont isotriviaux, et que* $\boldsymbol{P}$-$\mathcal{C}(\mathcal{N}) = 0$. *Alors* $\mathcal{N}$ *est isotrivial.*

Voici des exemples où la condition 2) de 4.3.1 est facile à vérifier.

**4.3.5 Corollaire.** *Tout* $\mathcal{M} \in MIC_S$ *tel que* $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ *soit résoluble a la propriété de Grothendieck–Katz.*

En effet, $\mathcal{LG}(\mathcal{M})$ n'a alors aucun quotient de Lie simple non-abélien. Un cas très particulier (essentiellement dû à Chudnovsky–Chudnovsky [18]) est le suivant :

**4.3.6 Corollaire.** *Tout objet* $\mathcal{N} \in MIC_S$ *de rang* 1 *vérifie la conjecture de Grothendieck* 3.3.1.

**4.3.7 Corollaire.** *Supposons que tout sous-objet simple de* $\underline{\mathrm{End}}\mathcal{M}$ *soit ou bien isotrivial, ou bien irrégulier* (*i.e. à singularités irrégulières "à l'infini"*). *Alors* $\mathcal{M}$ *a la propriété de Grothendieck–Katz.*

(Utiliser 3.2.7.1).

**4.3.8 Corollaire.** *Supposons que S soit le complémentaire d'une réunion de diviseurs $D_i$ dans l'espace projectif, que $\mathcal{M}$ soit régulier, et que les différences des exposants*[7] *de $\mathcal{M}$ autour de chaque $D_i$ soit irrationnelles ou entières. Alors $\mathcal{M}$ a la propriété de Grothendieck–Katz.*

(Utiliser 3.2.7.2 ; la monodromie de $\mathcal{L}$ autour de chaque $D_i$ est triviale, donc $\mathcal{L}$ est trivial sous nos hypothèses).

C'est par exemple le cas, pour un paramètre $t$ suffisamment général, de la connexion de Knizhnik–Zamolodchikov donnée par la 1-forme

$$t \sum_{i<j} A_{(i,j)} \frac{d(x_i - x_j)}{x_i - x_j}$$

sur le fibré trivial sur $(\mathbb{A}^1)^d \backslash$ diagonales, où les matrices constantes $A_{(i,j)}$ vérifient les conditions d'intégrabilité usuelles (*cf.* [43]).

**4.4 Réduction de 4.3.1 à 4.3.4 + 4.3.6.** Remarquons que 1) $\Longrightarrow$ 2) dans 4.3.1 découle immédiatement de l'implication directe $\Longrightarrow$ dans 4.1.2, compte tenu de ce que dans le diagramme commutatif d'épimorphismes canoniques

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[d, "\iota"'] \\
\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})) \arrow[r] & \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

$\iota$ est un isomorphisme puisque $\mathcal{L}$ est simple.

Nous allons déduire l'implication réciproque 2) $\Longrightarrow$ 1) de 4.3.1 des corollaires 4.3.4 et 4.3.6, qui seront prouvés ultérieurement (et simultanément, *cf.* §6 complété par 7.1.3).

Considérons l'algèbre de Lie $\mathcal{J} = \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})/\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ dans la catégorie tannakienne $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ (qu'on peut supposer neutre quitte à remplacer $k$ par une extension finie). Il est clair que les $p$-courbures de $\mathcal{J}$ s'annulent pour presque tout $p$, *i.e.* que $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{J}) = 0$.

Par ailleurs, considérons le quotient $\mathcal{Q} = \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})/(\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) + \mathrm{Rad}\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}))$ de $\mathcal{J}$ par l'idéal $\mathrm{Rad}\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})/(\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Rad}\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}))$. Cette algèbre de Lie de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est produit de ses idéaux simples non-abéliens dans $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ (voir plus bas, 14.3, pour les détails sur la notion d'"algèbre de Lie semi-simple" dans une catégorie tannakienne).

Or par hypothèse, toute algèbre de Lie simple non-abélienne $\mathcal{L}$ dans $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ qui est quotient de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ par un idéal de Lie (en particulier, tout facteur simple de $\mathcal{Q}$), on a $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{L}) \neq 0$. On a donc $\mathcal{Q} = 0$. A fortiori, les fibres de $\mathcal{J}$ sont des algèbres de Lie résolubles.

Considérons à nouveau l'objet $\mathcal{N}$ de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ introduit dans la preuve de 3.2.1 : $\mathcal{J}$ n'est autre que l'image de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{N}' := \underline{\mathrm{End}}(\underline{\mathrm{End}}\mathcal{N})$, qui s'identifie aussi à $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{N}')$. Donc la composante neutre du groupe de Galois différentiel de $\mathcal{N}'$ (en n'importe quel

[7] on trouvera une discussion détaillée des exposants dans [9, I.6.5]

point) est résoluble. La théorie de Galois différentielle montre que, quitte à remplacer $S$ par un revêtement étale fini (ce qui est loisible), $\mathcal{N}'$ est extension itérée d'objets de rang 1 dans $MIC_S$. Puisque $\boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{LG}(\mathcal{N}')) = 0$, on conclut de 4.3.4 et 4.3.6 que $\mathcal{LG}(\mathcal{N}') = \mathcal{J} = 0$, d'où $\mathcal{LG}(\mathcal{M}) = \boldsymbol{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$. □

## 5 Un critère d'algébricité

Nous démontrons, dans le cadre de la théorie des $G$-fonctions (*cf.* [3]), un critère d'algébricité dont la formulation est proche du critère de rationalité bien connu de Borel–Dwork [26], et qui s'avère particulièrement adapté à l'étude de la conjecture de Grothendieck.

**5.1 Densités.** Soit $k$ un corps de nombres. Pour toute place finie $v$ de $k$, on note $p_v$ sa caractéristique résiduelle, $k_v$ le complété de $k$ en $v$. On pose $\varepsilon_v = \frac{[k_v:\mathbb{Q}_{p_v}]}{[k:\mathbb{Q}]}$ et on normalise la valeur absolue $v$-adique par $|p_v| = p_v^{-\varepsilon_v}$ ; on note $\mathbf{N}(v)$ le degré résiduel. On a $\sum_{v|p} \varepsilon_v = 1$.

Soit $V$ un ensemble de places finies de $k$. On introduit les "densités" inférieure et supérieure

$$\underline{\delta}(V) = \liminf_n \frac{\sum_{p_v \le n, v\in V} \varepsilon_v}{\sum_{p_v\le n} \varepsilon_v}, \quad \overline{\delta}(V) = \limsup_n \frac{\sum_{p_v \le n, v\in V} \varepsilon_v}{\sum_{p_v\le n} \varepsilon_v} .$$

En notant $V^c$ le complémentaire de $V$ dans l'ensemble des places finies de $k$, on a $\underline{\delta}(V) = 1 - \overline{\delta}(V^c)$. Pour $k = \mathbb{Q}$ (et seulement dans ce cas), on retrouve les notions usuelles de densités naturelles inférieure et supérieure ; plus généralement, si $V$ est l'ensemble des places du corps de nombres $k$ au-dessus d'un ensemble $\mathcal{P}$ de nombres premiers rationnels, on retrouve les densités naturelles inférieures et supérieures de $\mathcal{P}$. Les densités $\underline{\delta}$ et $\overline{\delta}$ sont adaptées à la théorie des $G$-fonctions, notamment sous l'expression "logarithmique" que leur donne le lemme suivant :

**5.1.1 Lemme.**

$$\underline{\delta}(V) = \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{p_v \le n, v\in V} \log|p_v|^{-1} , \quad \overline{\delta}(V) = \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{p_v \le n, v\in V} \log|p_v|^{-1} .$$

*Démonstration.* On a

$$\frac{1}{n} \sum_{p_v \le n, v\in V} \log|p_v|^{-1} \le \frac{\log n}{n} \sum_{p_v \le n, v\in V} \varepsilon_v,$$

et

$$\frac{\log n}{n} \sum_{p_v \le n, v\in V} \varepsilon_v \sim \frac{\sum_{p_v \le n, v\in V} \varepsilon_v}{\sum_{p_v\le n} \varepsilon_v}$$

d'après le théorème des nombres premiers. Dans l'autre sens, on a, pour tout $\eta \in ]0,1[$ et tout $n > 1/\eta$,

$$\frac{1}{n} \sum_{\eta n \le p_v \le n, v \in V} \log |p_v|^{-1} \ge \frac{\log \eta n}{n} \sum_{\eta n \le p_v \le n, v \in V} \varepsilon_v \sim \frac{\sum_{\eta n \le p_v \le n, v\in V} \varepsilon_v}{\sum_{p_v \le n} \varepsilon_v}$$

toujours d'après le théorème des nombres premiers. Le lemme s'ensuit en faisant $\eta \to 0$. □

**5.1.2 Lemme.** *Si* $\sum_{v\in V} \frac{\log |p_v|^{-1}}{p_v - 1} < \infty$*, alors* $\overline{\delta}(V) = 0$ (*ce qui équivaut à dire que l'ensemble des premiers résiduels de* $v$ *est de densité nulle*).

En effet, pour tout $\eta > 0$, il existe $n'$ tel que $\sum_{n' \le p_v, v \in V} \frac{\log |p_v|^{-1}}{p_v - 1} < \eta$, d'où $\frac{1}{n} \sum_{n' \le p_v \le n, v\in V} \log |p_v|^{-1} \le \sum_{n' \le p_v \le n, v \in V} \frac{\log |p_v|^{-1}}{p_v - 1} < \eta$. Grâce au lemme précédent, on obtient alors $\overline{\delta}(V) = \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{p_v \le n, v \in V} \log |p_v|^{-1} < \eta$. □

Un lien entre ces densités et les densités naturelles usuelles définies par

$$\underline{d}(V) = \liminf_n \frac{\sum_{\mathbf{N}(v) \le n, v \in V} 1}{\sum_{\mathbf{N}(v)\le n} 1}, \quad \overline{d}(V) = \limsup_n \frac{\sum_{\mathbf{N}(v) \le n, v\in V} 1}{\sum_{\mathbf{N}(v) \le n} 1}$$

est donné par :

**5.1.3 Lemme.** *Soit* $V^{\text{déc}}$ *le sous-ensemble de* $V$ *formé des places décomposées sur* $\mathbb{Q}$*, i.e. telles que* $\varepsilon_v = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}$*. Alors*

$$\underline{\delta}(V^{\text{déc}}) = \frac{\underline{d}(V)}{[k:\mathbb{Q}]}, \quad \overline{\delta}(V^{\text{déc}}) = \frac{\overline{d}(V)}{[k:\mathbb{Q}]}.$$

*Démonstration*. Quand $n \to \infty$, on a

$$\sum_{v | \mathbf{N}(v) \le n} 1 \sim \sum_{v \text{ décomposée} | \mathbf{N}(v) \le n} 1 = [k:\mathbb{Q}] \sum_{v \text{ décomposée} | p_v \le n} \varepsilon_v .$$

Par la relation $\sum_{v|p} \varepsilon_v = 1$, et compte tenu de ce que la densité des premiers $p$ décomposés dans $k$ est $1/[k:\mathbb{Q}]$ (cas particulier du théorème de Chebotarev qui se ramène immédiatement au cas galoisien), on voit que $[k:\mathbb{Q}] \sum_{v \text{ décomposée} | p_v \le n} \varepsilon_v \sim \sum_{v | p_v \le n} \varepsilon_v$. Le lemme s'ensuit, compte tenu de ce que $\underline{d}(V^{\text{déc}}) = \underline{d}(V)$, $\overline{d}(V^{\text{déc}}) = \overline{d}(V)$. □

On obtient alors une *variante du théorème de Chebotarev* (cas où le corps de base est $\mathbb{Q}$) qui distingue entre les éléments d'une même classe de conjugaison :

**5.1.4 Proposition.** *Supposons l'extension* $k/\mathbb{Q}$ *galoisienne, et soit* $\sigma \in \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$*. Soit* $V_\sigma$ *l'ensemble des places finies de* $k$ *non ramifiées sur* $\mathbb{Q}$ *telles que l'automorphisme* *de Frobenius* $(v, k/\mathbb{Q})$ *en* $v$ *soit* $\sigma$. *Alors*

$$\underline{\delta}(V_\sigma) = \overline{\delta}(V_\sigma) = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}.$$

*Démonstration*. On reprend l'argument de Deuring usuel pour se ramener au cas cyclique. Soit $W_\sigma$ l'ensemble des places finies $w$ de $k^\sigma$ non ramifiées sur $\mathbb{Q}$ telles que l'élément de Frobenius en $w$ dans $k/k^\sigma$ soit $\sigma$. Alors $V_\sigma$ est l'ensemble des places de $k$ au-dessus de $W_\sigma^{\text{déc}}$. On en déduit que $\underline{\delta}(V_\sigma) = \underline{\delta}(W_\sigma^{\text{déc}})$ qui est aussi $\frac{\underline{d}(W_\sigma)}{[k^\sigma:\mathbb{Q}]}$ par le lemme précédent. De même avec les densités supérieures. Or par le théorème de Chebotarev (dans le cas cyclique), $\underline{d}(W_\sigma) = \overline{d}(W_\sigma) = \frac{1}{[k:k^\sigma]}$. □

**5.2 Les invariants $\rho, \sigma, \tau$.** Soit $S$ une variété lisse géométriquement connexe sur un corps de nombres $k$. Considérons un module à connexion intégrable $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ sur ouvert $U$ non vide de $S$. Dans un repère, et en termes de coordonnées locales $x_h$, la connexion correspond par le dictionnaire 1.2 à un système linéaire intégrable aux dérivées partielles[8]. Par dérivations successives du système

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\,\vec{y} = \vec{y}\,A_{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)},$$

on obtient des équations

$$\frac{1}{\underline{m}!}\,\frac{\partial^m}{\partial \underline{x}^{\underline{m}}}\,\vec{y} = \vec{y}\,A_{\underline{m}}$$

pour tout multi-indice $\underline{m}$ à $d$ composantes, $A_{\underline{m}} \in \mathrm{GL}_r(k(S))$.

Choisissons un modèle plat $\mathfrak{S}$ de $S$ sur $\mathcal{O}_k$. Pour toute place finie $v$ de $k$ de bonne réduction (*i.e.* telle que $\mathfrak{S} \otimes \mathcal{O}_{k_v}$ soit lisse au-dessus de $\mathcal{O}_{k_v}$), on définit la norme de Gauss $v$-adique sur $k(S)$ comme étant la valeur absolue étendant $|\ |_v$ sur $k$, associée à l'anneau local du point générique de la fibre spéciale de $\mathfrak{S} \otimes \mathcal{O}_{k_v}$, qui est un anneau de valuation discrète. Elle dépend du choix du modèle, mais étant donné deux modèles, il n'y a qu'un nombre fini de places $v$ pour lequelles les normes de Gauss $v$-adiques associées à chaque modèle diffèrent.

On pose

$$h(n, v) = \sup_{\underline{m}, |\underline{m}| \le n} \log^+ ||A_{\underline{m}}||_v,$$

où $||\ \ ||_v$ désigne le maximum des normes de Gauss des coefficients, et $\log^+ = \max(0, \log)$. On montre que $\frac{h(n,v)}{n}$ admet une limite quand $n$ tend vers l'infini, qui n'est autre que le $\log^+$ de l'inverse du rayon de solubilité $v$-adique générique de la

[8] la situation que nous considérons est toutefois un peu plus générale que celle de 1.2, en ce que $\mathcal{M}$ n'est pas supposé défini au point de coordonnées 0 (qui n'est pas supposé appartenir à $U$), ce qui est la cause des pôles apparaissant dans les matrices

connexion ([3, p. 230], [24]). On définit alors les invariants

$$\rho(\mathcal{M}) = \sum_{v \text{ finie}} \limsup_n \frac{h(n, v)}{n}, \quad \sigma(\mathcal{M}) = \limsup_n \sum_{v \text{ finie}} \frac{h(n, v)}{n},$$

$$\tau(\mathcal{M}) = \inf_p \limsup_n \sum_{v,\ p_v \geq p} \frac{h(n, v)}{n},$$

qui ne dépendent pas du choix du repère auxiliaire ni du modèle de $S$ choisi, et sont invariants par extension finie du corps de base $k$ et par remplacement de $S$ par un ouvert dense. Si l'un de ces trois invariants est fini, les deux autres le sont aussi, et on a $\sigma(\mathcal{M}) = \rho(\mathcal{M}) + \tau(\mathcal{M})$ ; on dit alors que l'on a affaire à une *G-connexion* ([9], [24]).

**5.2.1 Remarque.** Dans ce cas, les $p$-courbures sont toujours nilpotentes au moins pour un ensemble de $p$ de densité égale à 1 ; en effet, on a $\lim_n \frac{h(n,v)}{n} \geq \frac{\log |p_v|^{-1}}{p_v - 1}$ si la $v$-courbure n'est pas nilpotente, et on conclut grâce au lemme 5.1.2. On montre que toute connexion d'origine géométrique (*cf.* ci-dessous, 16.1) est une $G$-connexion (cf. [3, IV],[9]). *On conjecture en fait qu'être une G-connexion, avoir ses p-courbures nilpotentes pour un ensemble de p de densité 1, et être d'origine géométrique, sont des notions équivalentes*[9]. Rappelons aussi qu'une connexion dont presque toutes les $p$-courbures sont nulles est une $G$-connexion ; c'est une question ouverte de savoir s'il en est de même en supposant seulement les $p$-courbures nulles pour un ensemble de premiers de densité 1.

Comme l'a démontré B. Dwork, la quantité $\tau(\mathcal{M})$ est intimement liée à la distribution de l'ordre de nilpotence des $p$-courbures de $\mathcal{M}$, lorsque $p$ parcourt les nombres premiers [29] :

**5.2.2 Proposition.** *On se place dans le cas d'une G-connexion. Soit $V(\mathcal{M})$ l'ensemble des places finies $v$ telles que la réduction de $\mathcal{M}$ modulo $v$ soit non triviale* (*ou, ce qui revient au même, telles que les $v$-courbures soient non nulles*). *Alors*

$$\overline{\delta}(V(\mathcal{M})) \leq \tau(\mathcal{M}) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r-1}\right) \overline{\delta}(V(\mathcal{M})).$$

*A fortiori, les $p$-courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent pour un ensemble de premiers de densité* 1 *si et seulement si $\tau(\mathcal{M}) = 0$.*

Via 2.1.1, c'est démontré dans [29]. Dwork se limite au cas $d = 1$ et $k = \mathbb{Q}$, mais on trouvera la généralisation au cas de plusieurs variables et d'un corps de nombres arbitraire dans [24]). □

[9] cette conjecture remplace depuis les années 1980 la croyance opposée, le point d'oscillation se trouvant dans l'article de Dwork [27], au cours duquel l'opinion de l'auteur semble évoluer. Rappelons toutefois que Dwork a toujours préféré, semble-t-il, s'abstenir de proposer une définition formelle des systèmes différentiels d'origine géométrique

**5.2.3 Remarque.** Dwork établit aussi (*loc. cit.*, cor. 6) la minoration suivante. Soit $V_i(\mathcal{M})$ l'ensemble des places finies $v$ de $k$ où les $v$-courbures sont nilpotentes d'échelon exact $i$. Alors

$$\tau(\mathcal{M}) \geq \sum_{i=2,\dots,r} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{i-1}\right) \underline{\delta}(V_i(\mathcal{M})).$$

Est-ce une égalité ? Il serait intéressant d'autre part de savoir si $\underline{\delta}(V_i(\mathcal{M})) = \overline{\delta}(V_i(\mathcal{M}))$, et si ces densités sont rationnelles. En ce sens, la conjecture suivante précise des suggestions de [3] et [29] :

**5.2.4 Conjecture.** *Soit $\mathcal{M}$ une $G$-connexion. Alors*

i) *l'ensemble des places finies $v$ de $k$ telles que les $v$-courbures soient nilpotentes d'échelon fixé a une "densité"* (*au sens de* 5.1) *qui est un nombre rationnel,*

ii) $\tau(\mathcal{M}) \in \mathbb{Q}$.

iii) (conjecture de Grothendieck légèrement renforcée)[10]. $\tau(\mathcal{M}) = 0$ *si et seulement si $\mathcal{M}$ est isotriviale.*

Voir §16 pour un résultat partiel.

**5.3 Invariants $\rho, \sigma, \tau$ de séries.** Normalisons les valeurs absolues archimédiennes $w$ de $k$ comme suit : $|\xi|_w = |\xi|_\infty^{\varepsilon_w}$, où $\varepsilon_w = \frac{[k_w:\mathbb{R}]}{[k:\mathbb{Q}]}$ et où $|\ |_\infty$ est la valeur absolue euclidienne. La "formule du produit" s'écrit alors $\prod_{v \text{ place de } k} |\xi|_v = 1$ (pour $x \in k^*$).

Soit $\vec{y} = \sum \vec{a}_{\underline{m}} x^{\underline{m}} \in k^r[[x_1, \dots, x_d]]$ un vecteur-ligne de séries formelles. On définit

$$\rho(\vec{y}) = \sum_{v \text{ place de } k} \limsup_n \frac{1}{n} \sup_{|\underline{m}| \leq n} \log^+ ||\vec{a}_{\underline{m}}||_v,$$

$$\sigma(\vec{y}) = \limsup_n \sum_{v \text{ place de } k} \frac{1}{n} \sup_{|\underline{m}| \leq n} \log^+ ||\vec{a}_{\underline{m}}||_v,$$

$$\tau(\vec{y}) = \inf_p \limsup_n \sum_{v,\ p_v \geq p} \frac{1}{n} \sup_{|\underline{m}| \leq n} \log^+ ||\vec{a}_{\underline{m}}||_v,$$

quantités invariantes par extension finie du corps de base, et liées par l'inégalité $\sigma(\vec{y}) \leq \rho(\vec{y}) + \tau(\vec{y})$ .

**5.3.1 Corollaire.** *Supposons que $\vec{y} \in k^r[[\underline{x}]]$ soit solution d'une $G$-connexion, et supposons que le point* 0 *ne soit pas sur le lieu singulier* (*i.e. soit dans $U$*). *Alors on a* $\tau(\vec{y}) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r-1}\right)\overline{\delta}(V(\mathcal{M}))$. *En particulier, si les $p$-courbures s'annulent pour un ensemble de premiers $p$ de densité* 1, *alors* $\tau(\vec{y}) = 0$.

[10] "pour presque tout $p$" étant remplacé par "pour une infinité de $p$ de densité 1"

*Démonstration.* Pour toute place finie $v$, on a l'inégalité

$$\sup_{|\underline{m}|\leq n} \log^+ ||\vec{a}_{\underline{m}}||_v \leq h(n, v) + c_v,$$

où $c_v$ est une constante nulle pour presque tout $v$, d'où $\tau(\vec{y}) \leq \tau(\mathcal{M})$, et on applique la proposition précédente. □

**5.3.2 Remarque.** Il est immédiat que $\tau(\vec{y}) = 0$ si les coefficients des composantes de $\vec{y}$ sont entiers, ou plus généralement "S-entiers" (pour un ensemble fini convenable S de places de $k$). Dans le cas où $\vec{y}$ est solution d'un système différentiel comme ci-dessus, *sans singularité en* $0$, une (variante d'une) *conjecture de G. Christol prédit que si* $\tau(\vec{y}) = 0$, *alors* $\vec{y}$ *est algébrique sur* $k(\underline{x})$.

Le corollaire précédent montre que cette conjecture entraîne la conjecture de Grothendieck (sur le corps de base $k$).

Voici une réciproque partielle à 5.3.1 (qui sera utilisée dans l'appendice) :

**5.3.3 Proposition.** *Plaçons-nous dans le cas d'une seule variable. Supposons que $\mathcal{M}$ admette une $k$-base de solutions $\vec{y}_i$ dont les coefficients de chaque composante sont des S-entiers. Alors les $p$-courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent pour presque tout $p$.*

*Démonstration.* Choisissons un vecteur cyclique pour $\mathcal{M}$ sur $k(x)$, ce qui nous permet de traiter d'un opérateur différentiel $L$, et de remplacer les vecteurs $\vec{y}_i$ par des solutions $y_i$ de $L$ dans $\mathfrak{o}\left[\frac{1}{N}[[x]]\right]$ (pour $N$ convenable), linéairement indépendantes sur le corps de constantes $k$ de $k((x))$. Leur wronskien $W(y_1, \ldots, y_r)$ est non nul, et le reste par réduction modulo $v$ pour presque toute place finie $v$. Le lemme du wronskien – valable en toute caractéristique[11] – permet de conclure que pour presque tout $v$, les réductions modulo $v$ des $y_i$ sont linéairement indépendantes sur le corps des constantes $\kappa(v)((x^p))$ de $\kappa(v)((x))$, ce qui entraîne la nullité de la $p$-courbure d'après [38, 6.0.7]. □

Considérons à présent le vecteur $\vec{y}^{\,\mathrm{sym}\,n}$ dont les composantes sont les monômes de degré $n$ en les composantes de $\vec{y}$ (écrits dans l'ordre lexicographique).

**5.3.4 Lemme.**

$$\rho(\vec{y}^{\,\mathrm{sym}\,n}) \leq \rho(\vec{y}), \quad \tau(\vec{y}^{\,\mathrm{sym}\,n}) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\tau(\vec{y}),$$

$$\sigma(\vec{y}^{\,\mathrm{sym}\,n}) \leq \rho(\vec{y}) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\tau(\vec{y}).$$

*Démonstration.* $\limsup_n \frac{1}{n} \sup_{|\underline{m}|\leq n} \log^+ ||\vec{a}_{\underline{m}}||_v$ n'est autre que le $\log^+$ de l'inverse du rayon de convergence de $\vec{y}$, ce qui rend immédiate la première inégalité. Pour la seconde, écrivons une composante arbitraire $\sum b_{\underline{m}} x^{\underline{m}} \in k^r[[x_1, \ldots, x_d]]$ de

[11] voir par exemple [23, App. B] qui traite même le cas de plusieurs variables

$\vec{y}^{\mathrm{sym}\, n}$ comme monôme $y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$. On a donc $b_{\underline{m}} = \sum_{\sum \underline{m}_j = \underline{m}} \prod_{j=1}^{j=n} a_{i_j, m_j}$, et $\log^+ |b_{\underline{m}}|_v \leq \max_{\sum \underline{m}_j = \underline{m}} \sum_{j=1}^{j=n} \log^+ |a_{i_j, m_j}|_v$ (plus un terme $O(\log |\underline{m}|)$ si $v$ est archimédienne). Notons $(\dots, \underline{m}'_j, \dots)$ le $n$-uplet qui réalise le maximum. Quitte à permuter les facteurs $y_{i_j}$, on peut supposer que $|\underline{m}'_j|$ décroît avec $j$, de sorte que $|\underline{m}'_j| \leq |\underline{m}|/j$. On obtient $\log^+ |b_{\underline{m}}|_v \leq \sum_{j=1}^{j=n} \max_{|\underline{m}'_j| \leq |\underline{m}|/j} \log^+ |a_{i_j, m_j}|_v$ (plus un terme $O(\log |\underline{m}|)$ si $v$ est archimédienne), et il n'est alors pas difficile d'en déduire la deuxième inégalité. La troisième découle des deux précédentes.

**5.3.5 Remarque.** La borne pour $\tau(\vec{y}^{\mathrm{sym}\, n})$ est souvent optimale. Par exemple, on peut montrer que c'est le cas pour $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \log(1+x) \end{pmatrix}$ en suivant [3, p.150].

**5.4 Le critère.** Il s'agit d'un critère d'algébricité inspiré à la fois de celui de Chudnovsky [18] (lui-même inspiré du critère de transcendance bien connu de Schneider–Lang), et du critère de rationalité de Borel–Dwork. Ce critère figurait sous une forme plus générale dans [3, VIII 1.2] ; nous en reproduisons ci-dessous le cas particulier (légèrement raffiné) qui nous intéresse, pour la commodité du lecteur. Pour une réécriture de ce critère dans le style arakelovien de J.-B. Bost [15][16], voir [17].

Rappelons le critère de rationalité Borel–Dwork, sous forme légèrement généralisée : une série $y \in k[[x]]$ est rationnelle si (et seulement si) $\tau(y) = 0$ et $\prod_{v \text{ finie}} M_v(y) > 1$ (où $M_v$ désigne le rayon de méromorphie de $y$ vue comme fonction $v$-adique).

Notre critère d'algébricité est d'aspect semblable, mais remplace le rayon de méromorphie de $y(x)$ par le rayon de méromorphie d'une uniformisation simultanée de $y$ et $x$ par une nouvelle variable $z$.

**5.4.1 Définition.** Soit $y \in k[[x_1, \dots, x_d]]$ et soit $v$ une place de $k$. Une *uniformisation $v$-adique simultanée de $y$ et $\underline{x}$* dans le polydisque non-circonférencié $D(0, R_v)^d$ est la donnée de $d+1$ fonctions méromorphes $v$-adiques $h_v(z_v), h_{v,i}(z_v)$ $(i = 1, \dots, d)$ de $d$ variables $z_{1,v}, \dots, z_{d,v}$ dans le polydisque non circonférencié $D(0, R_v)^d$, vérifiant :

1) $h_{v,i}(\underline{0}) = 0$ pour $i = 1, \dots, d$,

2) la matrice jacobienne à l'origine $\left(\frac{\partial h_{v,i}}{\partial z_{v,j}}(\underline{0})\right)$ est la matrice identité,

3) $y(h_{v,1}(z_v), \dots, h_{v,d}(z_v))$ est le germe en l'origine de la fonction méromorphe $h_v(z_v)$.

**5.4.2 Exemple.** $z_{i,v} = x_i, h_v = y$ est une uniformisation $v$-adique simultanée (dite triviale) de $y$ et $\underline{x}$ dans le polydisque $D(0, R_v(y))^d$.

**5.4.3 Théorème.** *Soit $y \in k[[\underline{x}]]$ telle que $\tau(y) = 0$ et $\rho(y) < \infty$. Supposons que pour toute place $v$ de $k$, il existe une uniformisation $v$-adique simultanée de $y$ et $\underline{x}$ dans un polydisque $D(0, R_v)^d$, et que $\prod R_v > 1$.*

*Alors $y$ est algébrique sur $k(\underline{x})$.*

**5.4.4 Remarques.** 1) Le cas où l'uniformisation $v$-adique est l'uniformisation triviale pour tout $v$ correspond au critère de Borel–Dwork ; on obtient dans ce cas la conclusion plus forte que $y \in k(\underline{x})$.

L'hypothèse est à rapprocher de la notion d'uniformisation adélique simultanée introduite en transcendance dans [5], où la condition $\prod R_v > 1$ était affaiblie en $\prod R_v \geq 1$. Nous y reviendrons dans l'appendice.

2) Le théorème admet une réciproque partielle (qui justifie notamment la généralisation à plusieurs variables) : si $y \in k[[x]]$ est algébrique sur $k(x)$ (une seule variable), alors pour $d$ convenable, et pour toute place complexe de $k$, il existe une uniformisation simultanée de $x_1, \dots, x_d$ et de toute fonction symétrique de $y(x_1), \dots, y(x_d)$ sur $\mathbb{C}^d$ (uniformisation d'Abel–Jacobi). L'idée (dûe à Chudnovsky [18]) d'utiliser l'uniformisation d'Abel–Jacobi dans ce contexte apparaîtra en 6.4.

*Démonstration*. Nous procéderons en plusieurs étapes (en suivant [3, VIII]).

1*er pas*. Fixons un entier $r > 0$ (destiné à tendre ultérieurement vers $\infty$) et un paramètre $\eta \in ]0, 1[$ (destiné à tendre ultérieurement vers 0).

Notons $\vec{y} = \sum \vec{a}_{\underline{m}} x^{\underline{m}}$ le vecteur de composantes $(1, y, \dots, y^{r-1})$. La finitude de $\tau(y)$ et $\rho(y)$ entraîne celle de $\sigma(\vec{y})$. On construit une suite de vecteurs-polynômes $\vec{p}_N \in k^r[\underline{x}]$, vérifiant :

a) $M := \mathrm{ord}_0\, \vec{p}_N.\vec{y} \geq N$,

b) $\deg \vec{p}_N \leq (\frac{1}{r}(1 + \frac{1}{\eta}))^{1/d} N + o(N)$,

c) $h(\vec{p}_N) \leq \eta\sigma(\vec{y})N + o(N)$ (où $h(\vec{p}_N)$ désigne la hauteur logarithmique invariante des coefficients de $p_N$).

La construction est standard : la condition $a$) définit un système linéaire homogène à $r\binom{\deg\, \vec{p}_N + d}{d}$ inconnues (les coefficients des composantes de $\vec{p}_N$) et $\binom{N-1+d}{d}$ équations, et on applique le lemme de Siegel).

2*ème pas*. On suppose $\vec{p}_N.\vec{y}$ non identiquement nul (i.e. $M$ fini, autrement le problème est résolu). On choisit alors un multi-indice $\underline{m}$, avec $|\underline{m}| = M$, tel que

$$\alpha := \frac{1}{\underline{m}!} \frac{d^m}{dx^{\underline{m}}} (\vec{p}_N.\vec{y}) \neq 0.$$

Pour toute place finie $v$ de $k$, on a l'estimation

$$(\flat) \qquad \log |\alpha|_v \leq \log^+ |\vec{p}_N|_v + \sup_{|\underline{m}| \leq M} \log^+ ||\vec{a}_{\underline{m}}||_v.$$

3*ème pas*. On considère un ensemble fini $V$ (destiné à augmenter) de places de $k$ contenant les places archimédiennes. Pour chaque $v$ dans $V$, on considère les uniformisations $v$-adiques simultanées de $y$ et $\underline{x}$ dans le polydisque $D(0, R_v)^d$ ; on écrit $h_v(z_v) = f_v(z_v)/g_v(z_v)$, $h_{v,i}(z_v) = f_{v,i}(z_v)/e_v(z_v)$, quotients de fonctions analytiques dans $D(0, R_v)^d$ avec $g_v(z_v), e_v(z_v)$ sans zéros dans $D(0, R_v)^d$ et valant 1 en l'origine. En notant $\vec{Z}_v(z_v)$ le vecteur de composantes $(f_v(z_v)^{r-1}, f_v(z_v)^{r-2}, \dots, 1)$, et $\psi(z_v)$ la fonction analytique $v$-adique $e_v(z_v)^{\deg \vec{p}_N}.\vec{p}_N(f_{v,1}(z_v)/e_v(z_v), \dots, f_{v,s}(z_v)/e_v(z_v)).\vec{Z}_v(z_v)$, on voit que

$\vec{p}_N.\vec{y}(h_{v,1}(z_v),\ldots,h_{v,s}(z_v))$ est le germe en l'origine de la fonction méromorphe $g_v(z_v)^{1-r}.e_v(z_v)^{-\deg \vec{p}_N}\psi(z_v)$ dans $D(0,R_v)^d$. Comme $\left(\frac{\partial h_{v,i}}{\partial z_{v,j}}(\underline{0})\right) = \mathrm{Id}$, et que $g_v(0) = e_v(0) = 1$, on a $\alpha = \frac{1}{\underline{m}!}\frac{d^m}{dx^{\underline{m}}}\psi(\underline{0})$.

*4ème pas*. Pour chaque $v$ dans $V$, choisissons $R'_v$ assez proche de $R_v$ par défaut. Les estimations de Cauchy donnent

$$\left|\frac{1}{\underline{m}!}\frac{d^m}{dx^{\underline{m}}}\psi(\underline{0})\right|_v \le R_v'^{-M} \sup_{|z|_v = R'_v} |\psi(z)|_v,$$

d'où

$$(\sharp) \qquad \log|\alpha|_v \le -M\log R'_v + \log^+|\vec{p}_N|_v + \deg\ \vec{p}_N.\chi_v + o(N),$$

où l'on a posé

$$\chi_v = \max(\log \sup_{|z|_v=R'_v} |f_{i,v}(z_v)|_v, \ldots, \log \sup_{|z|_v=R'_v} |e_v(z_v)|_v).$$

*5ème pas*. On additionne les inégalités ($\flat$) pour $v \notin V$ et ($\sharp$) pour $v \in V$, et on applique la formule du produit, ce qui donne

$$M\sum_{v\in V}\log R'_v \le h(\vec{p}_N) + \sup_{|\underline{m}|\le m}\log^+||\vec{a}_{\underline{m}}||_v + \deg\ \vec{p}_n\sum_{v\in V}\chi_v + o(N).$$

On divise cette inégalité par $M(\ge N)$ et on fait tendre $N$ vers l'infini, ce qui donne, compte tenu des estimations pour la hauteur et le degré de $\vec{p}_N$

$$\sum_{v\in V}\log R'_v \le \eta\sigma(\vec{y}) + \limsup_M \sum_{v\in V}\frac{1}{M}\sup_{|\underline{m}|\le M}\log^+||\vec{a}_{\underline{m}}||_v + \left(\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\right)^{1/d}\sum_{v\in V}\chi_v.$$

*6ème pas*. Comme $\tau(y) = 0$, on peut remplacer $\sigma(\vec{y})$ par $\rho(y)$, et

$$\limsup_M \sum_{v\in V}\frac{1}{M}\sup_{|\underline{m}|\le M}\log^+||\vec{a}_{\underline{m}}||_v$$

par $\sum_{v\notin V}\log^+ R_v(y)^{-1}$ (par l'argument de 5.3.4 ; cette dernière série converge puisque $\rho(y) < \infty$). Ceci permet de faire tendre $r$ vers l'infini, puis $\eta$ vers 0, et enfin $R'_v$ vers $R_v$, ce qui donne

$$\sum_{v\in V}\log R_v \le \sum_{v\notin V}\log^+ R_v(y)^{-1}.$$

En prenant $V$ assez grand, ceci contredit l'hypothèse $\prod R_v > 1$. On conclut de là que pour $N$ assez grand, $\vec{p}_N.\vec{y} = 0$, donc $y$ est algébrique. $\square$

**5.4.5 Corollaire.** *Supposons que $\vec{y} \in k^r[[\underline{x}]]$ soit solution d'une $G$-connexion de rang $r$ dont les $p$-courbures s'annulent pour un ensemble de premiers $p$ de densité* 1. *Supposons en outre que pour toute place $v$ de $k$, il existe une uniformisation $v$-adique* *simultanée d'une certaine composante $y$ de $\vec{y}$ et $\underline{x}$ dans un polydisque $D(0, R_v)^d$, et que $\prod R_v > 1$. Alors $y$ est algébrique sur $k(\underline{x})$.*

*Démonstration*. Puisque les $p$-courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent pour un ensemble de premiers $p$ de densité 1, on peut, d'après 3.2.7, après passage de $U$ à un revêtement fini étale $U'$, supposer que $\mathcal{M}_{U'}$ s'étend en un module à connexion sur une compactification lisse $\bar{S}'$, donc n'ait pas de singularité "à l'infini". On peut alors appliquer 5.3.1 et 5.4.3 pour conclure. □

**5.4.6 Remarque.** Dans la situation où $\prod R_v > 0$ et où $R_v$ est infini pour l'une au moins des places archimédiennes de $k$, ce critère devient un cas particulier du critère de J.-B. Bost formulé dans le cadre beaucoup plus général des feuilletages algébriques.

# 6 Preuve de 4.3.4 et 4.3.6 (cas d'un corps de nombres)

**6.1.** Il s'agit de prouver les énoncés suivants (le premier étant légèrement plus fort que 4.3.4), dans le cas où $k$ est un corps de nombres[12] (voir aussi [3, VIII], et [18] pour le second énoncé).

**6.1.1 Proposition.** *Supposons que $\mathcal{N} \in MIC_S$ s'inscrive dans une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{N}' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}'' \to 0$$

*où $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}''$ sont isotriviaux, et supposons que les $p$-courbures de $\mathcal{N}$ s'annulent pour une infinité de $p$ de densité 1. Alors $\mathcal{N}$ est isotrivial.*

**6.1.2 Proposition.** *Tout objet $\mathcal{N} \in MIC_S$ de rang* 1 *vérifie la conjecture de Grothendieck* 3.3.1.

Il est commode de se ramener au cas où $S$ est une courbe. Comme dans les deux cas, il suit de l'hypothèse sur les $p$-courbures que $\mathcal{N}$ est régulier (3.2.7), tout est affaire de montrer la finitude de la monodromie ($k$ étant plongé dans $\mathbb{C}$). Or on sait d'après Lefschetz que pour une courbe affine lisse "assez générale" $C$ tracée sur $S$ (quitte à remplacer $k$ par une extension finie), $\pi_1(C(\mathbb{C})) \to \pi_1(S(\mathbb{C}))$ est surjectif.

**6.1.3 Remarque.** Par ailleurs, l'hypothèse sur les $p$-courbures implique que $\mathcal{N}$ s'étend à la complétion projective lisse de $C$ (3.2.7), ce qui permet de supposer que $S$ est une courbe projective lisse. Nous n'aurons pas à nous en servir.

[12] le cas d'un corps de base de caractéristique nulle quelconque sera ramené au cas d'un corps de nombres au chapitre suivant ; du reste le fragment 10.2 suffirait à effectuer cette réduction

**6.2.** Il est suggestif et utile de traduire 6.1.1 et 6.1.2 en termes de différentielles (en nous plaçant de nouveau dans la situation d'une variété lisse géométriquement connexe quelconque $S$ définie sur un corps de nombres[13] $k$). Comme l'isotrivialité est une propriété locale pour la topologie étale sur $S$, de même que l'hypothèse sur les $p$-courbures, on se ramène à supposer dans 6.1.1 que $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ sont des connexions triviales, puis que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'' = (\mathcal{O}_S, d)$. L'extension $\mathcal{N}$ correspond alors à un élément $[\omega]$ de $H^1_{\mathrm{DR}}(S)$ dont la nullité équivaut à la trivialité (et à l'isotrivialité) de $\mathcal{M}$ (*cf.* [45, 2.5]). Quitte à localiser $S$, on peut supposer que $[\omega]$ est la classe d'un élément $\omega$ de $H^0(S, \Omega^1_S)$. Ceci ramène 6.1.1 à ceci :

**6.2.1 Proposition.** *Soit $\omega$ une* 1*-forme fermée sur $S$ telle que $\omega$ modulo $v$ soit localement exacte* (*ou, ce qui revient au même, annulée par l'opérateur de Cartier* [38, §7]) *pour tout place finie $v$ de $k$ au-dessus d'un ensemble de premiers rationnels $p$ de densité* 1*. Alors $\omega$ est exacte.*

Quant à 6.1.2, l'énoncé se ramène au suivant, dans le cas où le fibré de rang 1 sous-jacent $M$ est isomorphe à $\mathcal{O}_S$ (ce qu'on peut supposer en localisant), *cf.* [38, introduction, et 7.4] :

**6.2.2 Proposition.** *Soit $\omega$ une* 1*-forme fermée sur $S$ telle que $\omega$ modulo $v$ soit localement logarithmiquement exacte* (*ou, ce qui revient au même, fixée par l'opérateur de Cartier*) *pour toute place finie $v$ de $k$ au-dessus d'un ensemble de premiers rationnels $p$ de densité* 1*. Alors il existe $n$ entier non nul tel que $n\omega$ soit logarithmiquement exacte* (*i.e. de la forme $df/f$*)*.*

Cette proposition donne une réponse positive au problème étudié dans [38, §7] sous divers avatars.

**6.3 Réduction au cas où $S$ est un schéma en groupe commutatif.** Comme on l'a vu plus haut, on peut supposer que $S$ est une courbe lisse, et il s'agit de prouver 6.1.1 et 6.1.2. On peut aussi supposer que $S(k) \neq \emptyset$ et on fixe un point base $s_0 \in S(k)$.

Soit $\bar{S}$ la complétion projective lisse de $S$, et étendons $\omega$ en une section (encore notée $\omega$) de $\Omega^1_{\bar{S}}(-D)$ pour un diviseur effectif convenable de $S$ (par exemple, le "diviseur des pôles" de $\omega$). On attache à $(\bar{S}, D)$ la jacobienne généralisée $J_D$ de $\bar{S}$ de module $D$, qui paramètre les fibrés inversibles sur $\bar{S}$ "rigidifiés" au-dessus de $D$. On a un morphisme

$$\varphi_{s_0} : S \to J_D, \quad s \mapsto [\mathcal{O}_{\bar{S}}(s) \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}(s_0)^\vee],$$

et il existe une unique forme différentielle invariante $\omega_{J_D}$ telle que $\omega = \varphi^*_{s_0}\omega_{J_D}$, *cf.* [46, p. 97]. Pour tout entier $n > 0$, $\varphi_{s_0}$ induit un morphisme

$$\varphi^{(n)}_{s_0} : S^{(n)} \to J_D, \quad s_1 + \cdots + s_n \mapsto [\otimes(\mathcal{O}_{\bar{S}}(s_i) \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}(s_0)^\vee)]$$

[13] on verra au chapitre suivant comment généraliser au cas d'un corps de base de caractéristique nulle quelconque

où $S^{(n)}$ désigne la puissance symétrique $n$-ième de $S$, et $(\varphi_{s_0}^{(n)})^*(\omega_{J_D})$ n'est autre que $\sum \mathrm{pr}_i^*\omega$.

Pour $n \geq \dim J_D$, on sait que $\varphi_{s_0}^{(n)}$ est dominante[14]. Il suit que la condition que l'opérateur de Cartier annule (*resp.* fixe) $\omega$ - donc aussi $\sum pr_i^*\omega$ - modulo $v$, implique la condition analogue pour $(\varphi_{s_0}^{(n)})^*(\omega_{J_D})$. Par ailleurs, si $\omega_{J_D}$ est exacte (*resp.* logarithmiquement exacte) il en est de même de $\omega = \varphi_{s_0}^*\omega_{J_D}$. On peut donc remplacer, dans 6.1.1 et 6.1.2, $S$ par le schéma en groupe commutatif $J_D$.

**6.4 Cas où $S$ est un schéma en groupe commutatif.** Supposons donc que $S$ soit un schéma en groupe commutatif.

6.1.1 (*resp.* 6.1.2) équivaut à l'existence, sous l'hypothèse d'annulation des $p$-courbures, d'une solution $y_1 \in H^0(S, \mathcal{O}_S)$ (*resp.* de la forme $y_2^{1/n}$ avec $y_2 \in H^0(S, \mathcal{O}_S)$) du système différentiel

$$(*)_1 \quad dy = \omega \otimes 1, \quad \textit{resp.} \quad (*)_2 \quad dy = \omega \otimes y.$$

En fait, il est équivalent de trouver une solution algébrique sur $k(S)$ de $(*)_1$ (*resp.* $(*)_2$) : cela vient de ce que le groupe de Galois différentiel attaché à $(*)_1$ est a priori un sous-groupe de $\mathbb{G}_a$ (*resp.* $\mathbb{G}_m$), donc il est équivalent de dire que ce groupe est fini ou qu'il est trivial (*resp.* cyclique).

Choisissant des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_d$ au voisinage de l'origine de $S$, il s'agit donc de montrer que toute solution formelle $y \in k[[x_1, \ldots, x_d]]$ de $(*)_1$ (*resp.* $(*)_2$) est algébrique, sous l'hypothèse d'annulation des $p$-courbures.

Pour appliquer le critère 5.4.5, il nous faut savoir que

i) la connexion sous-jacente est une $G$-connexion,

ii) pour toute place $v$ de $k$, il existe une uniformisation $v$-adique simultanée de $y$ et $\underline{x}$ dans un polydisque $D(0, R_v)^d$, et que $\prod R_v > 1$.

Pour i), c'est clair dans le cas de $(*)_1$ puisque la connexion sous-jacente est extension de connexions triviales. Dans le cas de $(*)_2$, cela découle de l'hypothèse d'annulation des $p$-courbures pour presque tout $p$ (et non seulement pour une infinité de densité 1, *cf.* 5.2.3). A fortiori, l'invariant $\rho$ de la connexion est fini.

Pour ii), il suffit de prendre l'uniformisation triviale pour toute place finie, et pour tout plongement complexe $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, l'uniformisation donnée par l'exponentielle du groupe de Lie complexe $S(\mathbb{C})$

$$\exp_{S(\mathbb{C})} : \mathrm{Lie}\, S(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^d \twoheadrightarrow S(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Lie}\, S(\mathbb{C})/\pi_1(S(\mathbb{C}), 0)$$

qui donne un rayon d'uniformisation simultanée infini. La finitude de l'invariant $\rho$ de la connexion implique, par spécialisation, la finitude de $\rho(y)$, donc que $\prod_{v \text{ finie}} R_v > 0$. On a finalement $\prod_{v \text{ place de } k} R_v = \infty$. $\square$

[14] et d'ailleurs birationnelle pour $n = \dim J_D$

# II Analogue de la conjecture de Grothendieck en équicaractéristique nulle

## 7 Énoncé des résultats

**7.1.** Soit $\mathcal{M} \in MIC_S$. En 3.1, nous avons “épaissi” la situation en choisissant un sous-anneau $\mathfrak{o}$ de $k$ de type fini sur $\mathbb{Z}$, un $\mathfrak{o}$-schéma connexe $\mathfrak{S}$ à fibres géométriquement connexes, et un $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$-module localement libre à connexion intégrable $\mathfrak{M}$, tels que $S$ et $\mathcal{M}$ se déduisent de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{M}$ par extension des scalaires $\mathfrak{o} \hookrightarrow k$.

Il est facile de voir que si $\mathcal{M}$ est isotrivial, alors pour tout point fermé $t$ d’un ouvert dense de Spec $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$, la fibre de $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$ en $t$ est isotriviale.

Nous nous proposons de démontrer la réciproque[15], analogue en équicaractéristique nulle de la conjecture de Grothendieck 3.3.3 :

**7.1.1 Proposition.** *Si pour tout point fermé $t$ d’un ouvert dense de* Spec $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$*, la fibre de $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$ en $t$ est isotriviale, alors $\mathcal{M}$ est isotrivial.*

**7.1.2 Remarque.** Dans un manuscrit récent [34], E. Hrushovsky propose une autre approche de ce résultat par la théorie des modèles.

**7.1.3 Corollaire.** *$\mathcal{M}$ vérifie la conjecture de Grothendieck si et seulement si $(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}})_t$ vérifie la conjecture de Grothendieck pour tout point fermé $t$ d’un ouvert dense de* Spec $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$.

Comme $\kappa(t)$ est un corps de nombres, cela ramène l’étude de la conjecture de Grothendieck au cas où le corps de base $k$ est un corps de nombres, démontrant ainsi une assertion non justifiée de [38, Intro.], et complétant la preuve de 4.3.4 et 4.3.6 dans le cas général.

**7.1.4 Remarque.** On peut se limiter, dans l’étude de la conjecture de Grothendieck, au cas où $S$ est une courbe affine sur un corps de nombres $k$. D’après le théorème de Belyi [12], il existe un revêtement étale $\pi : S \to \boldsymbol{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Au lieu de $\mathcal{M}$, il suffit de traiter $\pi_*(\mathcal{M})$, ou même d’après ce qui précède, les quotients de Lie simples horizontaux de $\mathcal{L}\mathcal{G}_\mathcal{}(\pi_*(\mathcal{M}))$. On est donc ramené au cas d’un fibré à connexion irréductible $\mathcal{N}$ sur $\boldsymbol{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ (muni d’un crochet de Lie horizontal si l’on veut). Les hypothèses sur les $p$-courbures impliquent la régularité de $\mathcal{N}$ en $0, 1, \infty$. Or il est connu que tout fibré à connexion régulière irréductible sur $\boldsymbol{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ admet une base de sections $e_j$ telle que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(e_j) = \sum_i \left(\frac{A_{ij}}{x} + \frac{B_{ij}}{x-1}\right)e_i$, où $A$ et $B$ sont des matrices constantes (cf. [11, §5]). Dans le cas “universel” où $A$ et $B$ sont vues comme des indéterminées non-commutatives, la condition d’annulation des $p$-courbures se traduit par des identités polynômiales universelles en $A$ et $B$ modulo $p$.

[15] qui était implicite dans [7, §5]

**7.2.** Soient $k$ un corps de caractéristique nulle, $T$ un $k$-schéma séparé de type fini, $f : S \to T$ un $T$-schéma lisse à fibres géométriquement connexes. Soit $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ la donnée d'un $\mathcal{O}_S$-module $M$ localement libre de rang $r < \infty$ et d'une connexion relative intégrable

$$\nabla : M \to \Omega^1_{S/T} \otimes_{\mathcal{O}_S} M,$$

qu'on voit comme une famille de connexions intégrables paramétrées par $T$.

Dans ce cadre relatif, diverses difficultés se présentent :

– la catégorie des fibrés à connexion relative intégrable n'est pas abélienne si $\dim T > 0$,

– la notion de connexion triviale soulève divers problèmes, *cf.* [8, 3.1.1]. Suivant *loc. cit.*, on dit que $\mathcal{M}$ est trivial (du point de vue de la connexion, pas du fibré sous-jacent) s'il est de la forme $(\mathcal{O}_S, d_{S/T}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_T} f^{-1}N$, où $N$ est un $\mathcal{O}_T$-module localement libre. Du fait que les anneaux locaux de $S$ soient "différentiellement simples par couches" au sens de *loc. cit.*, on a (*cf.* [8, 3.1.2.3, 3.1.3.2]) :

**7.2.1 Lemme** (non utilisé par la suite). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *$\mathcal{M}$ est trivial,*

ii) *$\mathcal{M}$ est Zariski-localement engendré par ses sections horizontales,*

iii) *l'homomorphisme canonique $M^\nabla \otimes_{f^{-1}O_T} \mathcal{O}_S \to M$ est un isomorphisme,*

En fait, nous éviterons ces difficultés en supposant $T$ *intègre* et en travaillant au point générique de $T$.

**7.2.2 Théorème.** *$\mathcal{M}_{\eta_T}$ est isotrivial si et seulement si pour tout point fermé $t$ d'un ouvert dense de $T$, $\mathcal{M}_{(t)}$ est isotrivial.*

La proposition 7.1.1 s'en déduit immédiatement, en localisant $\mathfrak{o}$ et en prenant $T = \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$, $S = \mathfrak{S}_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{M} = \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$.

**7.2.3 Remarque.** Il ne suffirait pas, dans 7.2.2, de demander l'existence d'une ensemble Zariski-dense de points fermés $t$ tels que $\mathcal{M}_{(t)}$ est isotrivial, comme le montre l'exemple de la connexion $\nabla(1) = t\frac{dx}{x}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m}$ relative à $T = \mathbb{A}^1$ (coordonnée $t$ sur $\mathbb{A}^1$), dont la fibre est isotriviale pour tout $t \in \mathbb{Q}$.

**7.3.** L'implication directe de 7.2.2 est facile. Occupons-nous de la réciproque. Nous commencerons par nous ramener au cas où $S$ est projectif sur $T$.

## 8 Réduction au cas projectif

**8.1.** Comme $\mathcal{M}_{\eta_T}$ est isotrivial si et seulement si $\mathcal{M}_{\bar{\eta}_T}$ l'est, il est loisible de remplacer $T$ par $T'$ génériquement fini et dominant sur $T$. En particulier, on se ramène à supposer $k$ algébriquement clos, et $T$ géométriquement connexe.

Il est aussi loisible de remplacer $S$ par $S'$ étale dominant sur $S$, ce qui permet de supposer $S_\eta$ quasiprojectif.

**8.1.1 Lemme.** *Si $\mathcal{M}_{(t)}$ est régulier pour un ensemble dense de points $t \in T$, il en est de même pour tout point d'un ouvert dense de $T$.*

Pour le voir, on peut par exemple utiliser le critère de régularité par restriction à des courbes (relatives dans $S/T$) [10, I.5], puis, en appliquant le lemme du vecteur cyclique, d'utiliser le critère de régularité en termes de valuation des coefficients de l'opérateur différentiel associé, voir par exemple [10, II. 4.2] pour des détails.

**8.1.2 Remarque.** On ne peut remplacer "pour tout point d'un ouvert dense" par "pour tout point" à cause du phénomène de confluence.

**8.2.** Comme toute connexion isotriviale est régulière, on déduit de l'hypothèse de 7.2.2 et du lemme que $\mathcal{M}_{\eta_T}$ est régulière.

Quitte à remplacer $T$ par un ouvert dense, on peut trouver une compactification projective lisse relative $\bar{S} \to T$ de $S \to T$, où $\partial S_{/T} := \bar{S} \setminus S$ est un diviseur à croisements normaux strict relatif à $T$ (Hironaka). La méthode algébrique de [10, I.4][16] permet d'étendre $\mathcal{M}$, quitte à remplacer $T$ par un ouvert étale, en un module à connexion $\bar{\mathcal{M}}$ à pôles logarithmiques le long de $\partial S_{/T}$.

Pour chaque composante $D_i$ de $\partial S_{/T}$, on a alors la notion de résidu de $\nabla$ le long de $D_i$ : c'est un endomorphisme de $\bar{M}_{D_i}$, dont les valeurs propres appartiennent à l'image d'une section fixée : $\tau : \overline{k(S)} \to \overline{k(S)}/\mathbb{Z}$.

Si $\mathcal{M}_{(t)}$ est isotrivial pour tout point fermé $t \in T$, la fibre en $t$ de $\mathrm{Res}_{D_i}(\nabla)$ est semi-simple, et de valeurs propres $\in \tau(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Il s'ensuit que $\mathrm{Res}_{D_i}(\nabla)$ est lui-même semi-simple, de valeurs propres "constantes" $\in \tau(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. En particulier, pour tout point $t \in T$ et tout plongement $\kappa(t) \hookrightarrow \mathbb{C}$ (s'il en est), la monodromie locale de $\mathcal{M}_{(t)} \otimes \mathbb{C}$ autour de $(D_i)_t \otimes \mathbb{C}$ est d'ordre fini indépendant de $t$.

**8.2.1 Lemme.** *Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \bar{S}' \arrow[drr] & S' \arrow[l, hook'] \arrow[r] & S \arrow[d] \\ & & T' \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

*où $T'$ est étale dominant sur $T$, $S'$ est étale dominant sur $S$, $S' \to T'$ est lisse à fibres géométriquement connexes, $\bar{S}' \to T'$ est projectif lisse, $\bar{S}' \setminus S$ est un diviseur de $\bar{S}'$ à croisements normaux relatifs sur $T'$, et $\mathcal{M}_{S'}$ s'étend en un fibré à connexion intégrable sur $\bar{S}'$ relativement à $T'$.*

*Démonstration.* On peut supposer $k$ de cardinal inférieur ou égal à celui du continu, ce qui permet de plonger $\bar{k}(T)$ dans $\mathbb{C}$. Par un descente standard, il suffit de montrer l'existence d'un revêtement étale fini connexe $S'_{\mathbb{C}}$ de $S_{\mathbb{C}} = S \otimes_T \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ tel que $\mathcal{M}_{S'_{\mathbb{C}}}$ s'étende en un fibré à connexion intégrable sur une compactification projective lisse $\bar{S}'_{\mathbb{C}}$ de $S'_{\mathbb{C}}$ telle que $\bar{S}'_{\mathbb{C}} \setminus S'_{\mathbb{C}}$ soit à croisements normaux. L'existence d'extensions à

[16] appliquée en prenant pour corps de base $K$ une clôture algébrique $\overline{k(S)}$ de $k(S)$

pôles logarithmiques ramène la question à trouver un revêtement étale fini $S'_{\mathbb{C}}$ de $S_{\mathbb{C}}$ tel que les monodromies locales autour des images inverses des $D_{i,\mathbb{C}}$ dans $S'_{\mathbb{C}}$, qui sont d'ordre fini, soient en fait triviales.

Fixant un point base fermé $s \in S_{\mathbb{C}}$, il suffit de définir $S'_{\mathbb{C}}$ par un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(S_{\mathbb{C}}, s)$ dont l'image par la représentation de monodromie est un sous-groupe sans torsion de $\mathrm{GL}((\mathcal{M}_{S_{\mathbb{C}}})_s)$. L'existence d'un tel sous-groupe est garantie par le lemme classique de Selberg. □

**8.3.** Ce lemme ramène la preuve de 7.2.2 au cas où $S$ est projectif lisse sur $T$. Quitte à remplacer $T$ par $T'$ étale dominant sur $T$, on peut supposer par ailleurs qu'il existe une section $T \to S$.

# 9 Espaces de modules de connexions (rappels)

**9.1.** Soient $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $T$ un $k$-schéma séparé de type fini, $f : S \to T$ un $T$-schéma projectif lisse à fibres géométriquement connexes. Soit $\mathbf{M}^{\natural}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ le foncteur contravariant qui associe à tout $T$-schéma séparé de type fini $T'$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{S\times_T T'}$-modules localement libres de rang $r$ munis d'une connexion intégrable relative à $T'$.

Dans [49], C. Simpson construit un $T$-schéma quasi-projectif $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ qui coreprésente $\mathbf{M}^{\natural}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ : il existe un morphisme canonique de foncteurs $\varphi : \mathbf{M}^{\natural}_{\mathrm{DR}}(S/T, r) \to \mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ tel que si $Y$ est un $T$-schéma séparé de type fini, tout morphisme de foncteurs $\mathbf{M}^{\natural}_{\mathrm{DR}}(S/T, r) \to Y$ se factorise de manière unique à travers $\varphi$. Cette propriété détermine $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ à isomorphisme unique près.

Simpson décrit beaucoup de propriétés intéressantes de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ (voir *loc. cit.*, II, 6.13[17]). Notamment, c'est un schéma de modules grossier : les points géométriques de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ représentent les classes d'équivalences de modules à connexion intégrable de rang $r$ sur les fibres géométriques de $f$ - deux modules à connexion étant décrétés équivalents si leur semi-simplifiés sont isomorphes.

La fibre de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ en tout point $t \in T$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S_t, r)$.

**9.2.** Le fibré à connexion $(\mathcal{O}_S, d_{S/T})^r$ correspond à une section, dite neutre, du morphisme structural $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r) \to T$. D'ailleurs, toute connexion relative triviale[18] de rang $r$ donne lieu à la même section, comme on le voir sur les points géométriques.

Le morphisme $\mathbf{M}^{\natural}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)^{\times_T r} \to \mathbf{M}^{\natural}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ "somme directe de $r$ connexions de rang 1" donne lieu à un morphisme de schémas $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)^{\times_T r} \to \mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ qui nous sera utile ($\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)^{\times_T r}$ désigne la puissance $r$-ième fibrée sur $T$).

**9.3.** Pour $r = 1$, ces espaces de modules sont classiques : le produit tensoriel des connexions munit $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)$ d'une structure de schéma en groupe commutatif

[17] Simpson énonce ses résultats avec $k = \mathbb{C}$, mais la construction est purement algébrique et vaut sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle quelconque

[18] voire "nilpotente"

sur $T$ (la section neutre s'identifiant dans ce cas à la section nulle), et l'oubli de la connexion induit un homomorphisme de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)$ vers le schéma de Picard relatif $\mathbf{Pic}^0(S/T)$. Cet homomorphisme est fidèlement plat, de noyau le schéma en groupe vectoriel attaché à $\Omega^1_{S/T}$, de sorte que $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)$ s'identifie à l'extension vectorielle universelle de $\mathbf{Pic}^0(S/T)$. Les connexions isotriviales de rang 1 sur les fibres géométriques $S_t$ correspondent aux points de torsion de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)_t = \mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S_t, 1)$.

## 10 Une application du théorème de Jordan

**10.1.** On se place de nouveau dans le cadre de 7.2.2, en supposant désormais que $f$ est projectif lisse et admet une section $\sigma$.

**10.1.1 Lemme.** *Il existe un revêtement étale fini $S'/S$ tel que les fibres de $S' \to T$ soient géométriquement connexes, et tel que pour tout $t \in T(k)$ et tout objet $\mathcal{M}(t) \in MIC_{S_t}$ isotrivial, le point de $\mathbf{M}_{DR}(S'/T, r)$ au-dessus de $t$ représentant $\mathcal{M}(t)_{S'_t}$ est l'image d'un point de torsion du $k$-groupe $\mathbf{M}_{DR}(S'_t, 1)^r$.*

*Démonstration*. Plongeons $k$ dans $\mathbb{C}$, et fixons $t \in T(k)$. Pour tout objet $\mathcal{M}(t) \in MIC_{S_t}$ isotrivial, l'image de $\pi_1(S_t(\mathbb{C}), \sigma(t))$ par représentation de monodromie attachée à $\mathcal{M}(t)$ est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, bien défini à conjugaison près. D'après un résultat classique de Jordan (*cf. e.g.* [19] pour un exposé "moderne"), un tel sous-groupe admet un sous-groupe normal abélien d'indice fini borné par une fonction $j(r)$ de $r$ seul. Comme $\pi_1(S_t(\mathbb{C}), \sigma(t))$ est finiment engendré, l'intersection $\Gamma$ de ses sous-groupes normaux d'indice $\leq j(r)$ est un sous-groupe caractéristique d'indice fini.

Considérons la suite exacte de groupes fondamentaux

$$\{1\} \to \pi_1(S_t(\mathbb{C}), \sigma(t)) \to \pi_1(S(\mathbb{C}), \sigma(t)) \to \pi_1(T(\mathbb{C}), t) \to \{1\}$$

qui est d'ailleurs scindée par $\sigma_*$. Le sous-ensemble $\Gamma.\sigma_*(\pi_1(T(\mathbb{C}), t))$ de $\pi_1(S(\mathbb{C}), \sigma(t))$ est en fait un sous-groupe, qui définit un revêtement étale fini $S'_{\mathbb{C}}/S_{\mathbb{C}}$ tel que les fibres de $S'_{\mathbb{C}} \to T_{\mathbb{C}}$ soient géométriquement connexes, revêtement qui descend automatiquement de $\mathbb{C}$ à $k$.

On a alors pour tout $t' \in T(k)$ la suite exacte

$$\{1\} \to \pi_1(S'_{t'}(\mathbb{C}), \sigma(t')) \to \pi_1(S'(\mathbb{C}), \sigma(t')) \to \pi_1(T(\mathbb{C}), t') \to \{1\}$$

et l'intersection de tout sous-groupe fini $G$ de $\pi_1(S(\mathbb{C}), \sigma(t'))$ avec $\pi_1(S'_{t'}(\mathbb{C}), \sigma(t'))$ est abélien.

Ceci montre que pour tout objet $\mathcal{M}(t') \in MIC_{S_{t'}}$ isotrivial, le groupe de Galois différentiel de $\mathcal{M}(t')_{S'_{t'}}$ est fini abélien, donc $\mathcal{M}(t')_{S'_{t'}}$ est somme directe d'objets de rang 1, nécessairement isotriviaux. D'où le lemme. □

**10.2.** Terminons la preuve de 7.2.2. On peut remplacer $S$ par $S'$ comme dans 10.1.1, et $\mathcal{M}$ par son image inverse sur $S'$. Cette connexion définit une section $\tau$ de

$\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r) \to T$. D'après l'hypothèse de 7.2.2 et 10.1.1, pour tout point $t \in S(k)$, $\tau(t)$ est dans l'image de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T, 1)$.

Considérons le produit fibré $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T, 1)^{\times_T r} \times_{\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T,r)} T$ (construit via $\tau$). Il existe un morphisme $h : T' \to T$ étale dominant tel que la seconde projection $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T, 1)^{\times_T r} \times_{\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T,r)} T'$ admette une section $\tau'$. La composée de $\tau'$ et de la projection sur $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T, r)$ n'est autre que $\tau \circ h$. Quitte à remplacer $T$ par $T'$, $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T, r)$ par $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S' \times_T T'/T', r)$ etc..., on peut donc supposer que $\tau$ se relève en une section $\tau'$ de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T, 1)^{\times_T r} \to T$. Il découle du lemme précédent qu'en fait $\tau(t) \in ((\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T, 1)^{\times_T r})_{\mathrm{tors}})_t$ pour tout $t \in T(k)$.

On en déduit que $\tau'$ est une section de torsion de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S'/T, 1)^{\times_T r}$. Le semi-simplifié de $\mathcal{M}_{\eta_T}$ est donc une connexion isotriviale. Pour terminer, on remarque que $\mathcal{M}_{\eta_T}$ est semi-simple en vertu du lemme suivant :

**10.2.1 Lemme.** *Si $\mathcal{M}_{(t)}$ est semi-simple pour un ensemble dense de points $t \in T$, il en est de même pour tout point d'un ouvert dense de $T$.*

*Démonstration*. Il suffit de prouver que si $\mathcal{M}$ s'inscrit dans une suite exacte

$$(*) \quad 0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0,$$

dont la fibre en un ensemble dense de points est scindée, alors cette suite est scindée sur un ouvert dense de $T$. L'extension $(*)$ définit une section $\lambda$ de $H^1_{\mathrm{DR}}(S/T, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M}'))$. Comme $S$ est projective lisse sur $T$, on sait qu'en remplaçant derechef $T$ par un ouvert dense si nécessaire, $H^1_{\mathrm{DR}}(S/T, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M}')) = \mathbf{R}^1 f_*\big(\Omega^*_{S/T}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M}'))\big)$ est localement libre de type fini et commute à tout changement de base (cf. [37, 8.0]). De plus, la fibre de $\lambda$ en tout point $t$ est la classe de l'extension $(*)_{(t)}$. L'hypothèse se traduit par le fait que la section $\lambda$ s'annule sur un sous-ensemble dense de $T$, donc $\lambda = 0$. $\square$

**10.2.2 Remarques.** 1) On pourrait raffiner 7.2.2, en affaiblissant l'hypothèse sur l'ensemble $\Delta$ considéré de points fermés $t$ tels que $\mathcal{M}_{(t)}$ soit supposé isotrivial. Par exemple si $\dim T = 1$, $\dim S = 2$, l'argument des exposants de 8.2 vaut dès que $\Delta$ n'est pas image de $\mathbb{Q}$ par une fonction algébrique (qu'on peut préciser). L'argument de la section de torsion de 10.2 vaut sous des hypothèses de hauteurs bien étudiées en géométrie diophantienne.

La méthode alternative de Hrushovsky le conduit à proposer d'autres types de conditions, dans l'esprit de l'élimination des quantificateurs.

2) Même pour $r = 1$, cas où l'on dispose de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ en inégales caractéristiques (l'extension vectorielle universelle de la composante neutre du schéma de Picard), une approche dans la veine ci-dessus ne fournirait pas une preuve alternative de la conjecture de Grothendieck en rang 1. En effet, il n'est plus vrai, en caractéristique $p > 0$, que les connexions isotriviales de rang 1 correspondent aux points de torsion de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)$.

3) Comme nous l'a signalé J.-B. Bost, c'est précisément pour établir un résultat sur les équations différentielles à solutions algébriques dans la veine du lemme 10.1.1

ci-dessus[19] que Jordan a démontré son théorème sur les sous-groupes finis du groupe linéaire [36].

# III Connexions d'origine géométrique

N. Katz a démontré la conjecture de Grothendieck pour la connexion de Gauss–Manin attachée à un morphisme lisse quelconque $f : X \to S$, ainsi que pour certains de ses facteurs directs découpés par un groupe fini de $S$-automorphismes de $X$. Sa méthode repose sur une formule remarquable reliant la $p$-courbure à l'application de Kodaira–Spencer [38].

Nous allons généraliser ce résultat à tout sous-quotient d'une telle connexion de Gauss–Manin, du moins sous une hypothèse (conjecturalement toujours vérifiée) de connexité des groupes de Galois motiviques. Par les résultats du chapitre I, cela suffira à établir la conjecture de Grothendieck–Katz pour toute connexion d'origine géométrique (sous une hypothèse analogue).

Outre la formule de Katz, les ingrédients essentiels de la démonstration sont le théorème de Mazur–Ogus [13], et la théorie des motifs purs, sous la forme inconditionnelle présentée dans [6].

La stratégie est de remplacer, dans l'esprit du chapitre I, les facteurs arbitraires de la connexion de Gauss–Manin attachée à un morphisme projectif lisse, qui ont "peu de structure" en général, par les facteurs de l'algèbre de Lie de Galois différentielle, qui ont une certaine interprétation motivique. Si la démonstration s'avère un peu technique, cela tient en grande partie, comme nous le verrons, à une lacune dans la théorie des motifs : on ne sait pas prouver que les groupes de Galois motiviques sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle sont connexes.

## 11 Isotrivialité, et horizontalité de la filtration de Hodge (rappels)

**11.1 Rappels sur la filtration de Hodge et l'application de Kodaira–Spencer.** Soient $k$ un corps, $S$ une $k$-variété lisse géométriquement connexe, et $f : X \to S$ un $k$-morphisme *projectif* et lisse. Pour alléger quelques notations, et sans perte de généralité, nous supposerons $S$ affine.

Le $\mathcal{O}_S$-module localement libre gradué $\mathcal{H}_f = \oplus_q \mathbb{R}^q f_* \Omega^*_{X/S}$ est muni de sa connexion de Gauss–Manin $\nabla$. La filtration de Hodge de $\mathcal{H}_f$ est la filtration décroissante donnée par $\mathrm{Fil}^i \mathcal{H}_f = \mathrm{Im}(\mathbb{R} f_* \Omega^{\geq i}_{X/S} \to \mathcal{H}_f)$. Elle n'est pas horizontale, mais on a la "transversalité de Griffiths" : $\nabla \mathrm{Fil}^i \mathcal{H}_f \subset \Omega^1_S \otimes \mathrm{Fil}^{i-1} \mathcal{H}_f$. Pour tout $i$ et tout champ de vecteurs $D$ sur $S$, on a donc une application $\mathcal{O}_S$-linéaire $Gr^i \nabla(D) : Gr^i \mathcal{H}_f \to Gr^{i-1} \mathcal{H}_f$, dite de Kodaira–Spencer.

[19] mais formulé de manière assez imprécise, *cf.* [32, p. 142]

Considérons l'hypothèse suivante :

$(*)_f$ la suite spectrale de Hodge–De Rham $E_1^{ij} = R^j f_* \Omega^{\geq i}_{X/S} \Longrightarrow \mathbb{R}^{i+j} f_* \Omega^*_{X/S}$ dégénère en $E_1$ ($i.e.$ $\oplus_j E_1^{ij} = Gr^i \mathcal{H}_f$ pour tout $i$ ), et les $Gr^i \mathcal{H}$ sont localement libres sur $S$.

Elle entraîne que

i) pour tout sous-module à connexion $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}_f$, la filtration de $\mathcal{M}$ induite par la filtration de Hodge est horizontale ($i.e.$ les $\mathrm{Fil}^i \mathcal{M}$ sont des sous-modules à connexion) si et seulement si pour tout $i$ et tout champ de vecteurs $D$, les applications de Kodaira–Spencer $Gr^i \nabla(D)$ sont nulles [38, 1.4.1.9] ;

ii) $(*)_{f^m}$ est vérifiée, en notant $f^m$ la puissance fibrée $m$-ième de $f$ au-dessus de $S$, et l'isomorphisme de Künneth $\mathcal{H}_f^{\otimes m} \cong \mathcal{H}_{f^m}$ est compatible aux connexions et filtrations de Hodge (en munissant le membre de gauche de la connexion, *resp.* filtration, puissance tensorielle). Par ailleurs, la dualité de Poincaré identifie le dual de $\mathcal{H}_f$ à $\mathcal{H}_f$ comme module à connexion, et cette identification est compatible aux filtrations à un décalage près (par la dimension relative de $f$).

**11.2 Isotrivialité et filtration de Hodge : le cas de caractéristique nulle.** L'hypothèse $(*)_f$ est satisfaite lorsque car $k = 0$ en vertu de la théorie de Hodge.

**11.2.1 Proposition.** i) *Soit $\mathcal{M}$ un sous-module à connexion* isotrivial[20] *de $\mathcal{H}_f$. Alors la filtration de Hodge induite sur $\mathcal{M}$ est horizontale. De plus, si $k$ est un sous-corps algébriquement fermé de $\mathbb{C}$, il existe un sous-module à connexion isotrivial $\mathcal{N}$ de $\mathcal{H}_f$ contenant $\mathcal{M}$ et provenant d'une sous-variation de structures de Hodge rationnelles de $\bigoplus_q R^q f_*^{\mathrm{an}} \mathbb{Q}$.*

ii) *Réciproquement, supposons (avec $k \subset \mathbb{C}$) que $\mathcal{M}$ soit un sous-module à connexion de $\mathcal{H}$ provenant d'une sous-variation de structures de Hodge rationnelles de $\bigoplus_q R^q f_*^{\mathrm{an}} \mathbb{Q}$, et que la filtration* $\mathrm{Fil}^* \mathcal{M}$ *soit horizontale. Alors $\mathcal{M}$ est isotrivial.*

*Démonstration*. i) Comme la condition de nullité de l'application de Kodaira–Spencer est invariante par revêtement étale fini de $S$, on peut supposer $\mathcal{M}$ trivial. Alors d'après le théorème de la partie fixe [20, 4.1], le plus grand sous-module à connexion trivial de $\mathcal{H}_f$ provient d'une sous-variation de structures de Hodge rationnelles de $R^q f_*^{\mathrm{an}} \mathbb{Q}$.

ii) Voir [38, 4.2.1.3]. Le point est que la monodromie en $s \in S(\mathbb{C})$ de $\mathcal{M}_s \cap H^*(X_s(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ est compacte par un argument de polarisation, mais aussi contenue dans le groupe discret $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_s \cap H^*(X_s(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\mathrm{torsion})$, donc finie. Dans ii), l'hypothèse de rationalité est essentielle (*cf.* [4] app.).

**11.3 Rappels sur la filtration conjuguée et l'isomorphisme de Cartier.** On suppose maintenant car $k = p > 0$. La filtration conjuguée de $\mathcal{H}_f$ est la filtration croissante donnée par $\mathrm{Fil}_i \mathcal{H}_f = \mathrm{Im}(\mathbb{R} f_*(\tau_{\leq i} \Omega^*_{X/S}) \to \mathcal{H}_f)$. C'est la filtration sur l'aboutissement de la suite spectrale conjuguée

$$ {}_c E_2^{ij} = R^i f_* H^j(\Omega^*_{X/S}) \Longrightarrow \mathbb{R}^{i+j} f_* \Omega^*_{X/S}. $$

[20] $i.e.$ qui devient constant sur un revêtement étale fini de $S$

La connexion de Gauss–Manin agit sur cette suite spectrale, et le terme ${}_cE_2^{ij}$ est de $p$-courbure nulle. En particulier, les $p$-courbures $\psi_p(D)$ envoient $\mathrm{Fil}_i\mathcal{H}_f$ dans $\mathrm{Fil}_{i-1}\mathcal{H}_f$. On note $Gr_i\psi_p(D) : Gr_i\mathcal{H}_f \to Gr_{i-1}\mathcal{H}_f$ l'application $\mathcal{O}_S$-linéaire induite sur les gradués.

Soit $F_{X/S} : X \to X^{(p)}$ le morphisme de Frobenius relatif. On dispose de l'isomorphisme de Cartier inverse $C^{-1} : \Omega^i_{X^{(p)}/S} \to H^i(F_{X/S*}\Omega^*_{X/S})$, caractérisé par sa multiplicativité et la formule locale suivante : si $x^{(p)}$ est la coordonnée locale sur $X^{(p)}$ correspondant à $x$ sur $X$, $C^{-1}(dx^{(p)}) = x^{p-1}dx$. Il induit un isomorphisme $C^{-1} : F_S^*E_1^{ji} \cong {}_cE_2^{ij}$ (cf. ([38, 2.3.1.2]).

Sous l'hypothèse $(*)_f$, la suite spectrale conjuguée dégénère en $E_2$ ([38, 2.3.2]), d'où un isomorphisme $C^{-1} : F_S^*Gr^i\mathcal{H}_f \cong Gr_i\mathcal{H}_f$.

**11.4 (Iso)trivialité et filtration de Hodge : le cas de caractéristique > 0.** Rappelons qu'en caractéristique $p > 0$, l'isotrivialité d'un module à connexion équivaut à sa trivialité, ou encore à la nullité des $p$-courbures.

Comme l'a montré N. Katz, la trivialité d'un sous-module à connexion $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}_f$ est reliée à l'horizontalité de la filtration de Hodge non de $\mathcal{M}$ lui-même, mais d'un certain "tordu par Cartier". Son résultat technique principal [38, 3] peut se formuler de la manière suivante (cf. aussi [44]).

**11.4.1 Théorème.** *Outre $(*)_f$, supposons qu'il existe un sous-module à connexion $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{H}_f$ tel que pour tout $i$, $C^{-1}$ envoie $F_S^*Gr^i\mathcal{M}'$ isomorphiquement sur $Gr_i\mathcal{M}$. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} F_S^*Gr^i\mathcal{M}' \arrow[r, "F_S^*Gr^i\nabla(D)"] \arrow[d, "C^{-1}"'] & F_S^*Gr^{i-1}\mathcal{M}' \arrow[d, "C^{-1}"'] \\ Gr_i\mathcal{M} \arrow[r, "Gr_i\psi_p(D)"] & Gr_{i-1}\mathcal{M} \end{tikzcd}$$

*est anticommutatif : $C^{-1}\circ F_S^*Gr^i\nabla(D) = -Gr_iR_p(D)\circ C^{-1}$.*

*En particulier, si $\mathcal{M}$ est un module à connexion trivial, la filtration de Hodge de $\mathcal{M}'$ est horizontale.*

Réciproquement, si la filtration de Hodge de $\mathcal{M}'$ est horizontale, on voit que les $R_p(D)$ envoient $\mathrm{Fil}_i\mathcal{M}$ dans $\mathrm{Fil}_{i-2}\mathcal{M}$, mais il n'est pas clair que les $R_p(D)$ s'annulent. Nous verrons en 15.5.2 un résultat partiel dans cette direction.

Katz remarque que l'existence de $\mathcal{M}'$ est vérifiée pour certains facteurs $\mathcal{M}$ découpés sur $\mathcal{H}_f$ par l'action d'un groupe fini d'automorphismes de $f$. En général, c'est une hypothèse difficile à satisfaire. Notre fil conducteur sera de remplacer (en caractéristique nulle) $\mathcal{H}_f$ par la connexion $\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$ dont les fibres sont les algèbres de Lie des groupes de Galois différentiels de $\mathcal{H}_f$, et de montrer l'existence de $\mathcal{M}'$ lorsque $\mathcal{M}$ est la réduction modulo $p$ d'un quelconque facteur direct de $\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$.

**11.4.2 Remarque** (Question de signe). La preuve “cristalline” de 11.4.1 que donne A. Ogus (via le théorème de Mazur) est plus dans le fil de la suite du présent chapitre. Elle donne bien l’anticommutativité, comme énoncé ci-dessus ([44, 2.9]). Chez Katz, on trouve l’affirmation que le diagramme ci-dessus commute au signe $(-)^{i-1}$ près, au lieu du signe $-$ ([38, 3.4.1.6], [44, rem. 2.12]) ; il semble que l’erreur de [38] soit l’interprétation 3.4.3 du calcul de cocycles (3.4.3.0) : le calcul (3.4.3.0) démontre en fait l’anticommutativité du diagramme ci-dessus.

# 12 Cycles motivés

**12.1 Introduction.** Dans tout ce paragraphe, on suppose de nouveau que $k$ est de caractéristique nulle, et même plongeable dans $\mathbb{C}$ pour simplifier.

Les motifs interviennent dans notre contexte par le biais suivant : il s’avère que l’algèbre de Lie du groupe de Galois différentiel générique $(\mathrm{LieGal}\mathcal{H}_f)_{|k(S)}$ est la réalisation de De Rham d’un motif sur $k(S)$ au sens de [6].

Parmi les diverses définitions des motifs purs dont on dispose et qui mènent à une théorie non conjecturale, celle de [6], très proche de la définition originale de Grothendieck, est la plus algébrique et se prête à la réduction modulo $p$. Nous commencerons par quelques rappels sur cette théorie.

Nous supposons le lecteur familier avec la construction et les propriétés élémentaires de la catégorie monoïdale $\mathbb{Q}$-linéaire des motifs de Grothendieck, définis en termes de correspondances algébriques modulo l’équivalence homologique. L’équivalence homologique des cycles algébriques se définit par la nullité des classes de cohomologie associées dans une cohomogie de Weil classique (Betti, De Rham, étale), et ne dépend pas du choix de cette dernière en vertu des isomorphismes de comparaison.

Chaque cohomologie classique définit un foncteur fibre, appelé réalisation, sur cette catégorie des motifs homologiques. Le problème est que faute de savoir démontrer les conjectures standard, on ignore si c’est une catégorie abélienne. Le remède proposé dans [6] consiste à inverser formellement certains morphismes de la catégorie dont les réalisations sont des isomorphismes. Les morphismes de cette catégorie sont appelés correspondances motivées dans *loc. cit.*

**12.2 Cycles et correspondances motivées.** On fixe une classe $\mathcal{V}$ de $k$-schémas projectifs lisses, stable par produit, somme disjointe. Soit $X \in \mathcal{V}$. On introduit dans *loc. cit.* le $\mathbb{Q}$-espace gradué $A^*_{\mathrm{mot}}(X)$ des cycles motivés sur $X$ (modelés sur $\mathcal{V}$), et pour toute cohomologie classique $H$, un homomorphisme gradué $A^*_{\mathrm{mot}}(X) \to H^{2*}(X)(*)$, dont l’image s’explicite ainsi : c’est l’ensemble des sommes finies de classes de cohomologie de la forme $\mathrm{pr}^{XY}_{X*}(\alpha \cap \mathrm{Lef}^{-1}_{XY}(\beta))$, où $Y \in \mathcal{V}$ (arbitraire), $\alpha$ et $\beta$ sont des cycles algébriques sur $X \times Y$, et $\mathrm{Lef}^{-1}_{XY}$ est l’inverse de l’isomorphisme de Lefschetz attaché à des polarisations de $X$ et $Y$ :

$$\mathrm{Lef}_{XY} \in \oplus_r \mathrm{Hom}(H^{2r}(X \times Y)(r), H^{2(d+\dim Y-r)}(X \times Y)(d + \dim Y - r)).$$

Étant donné un plongement $\iota : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, les images des cycles motivés dans les différentes cohomologies classiques se correspondent par les isomorphismes de comparaison canoniques

$$\mathrm{comp}_{\mathrm{B,DR}} : H(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) = H_{\mathrm{B}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \to H_{\mathrm{DR}}(X) \otimes_k \mathbb{C} \ ,$$

$$\mathrm{comp}_{\mathrm{B,ét}.p,\bar{\iota}} : H_{\mathrm{B}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \to H_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p) =: H_{\text{ét}.p}(X)$$

(qui dépend du choix d'un plongement $\bar{\iota} : \bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$ d'une clôture algébrique fixée de $k$, compatible à $\iota$).

Les images des cycles motivés en cohomologie de Betti sont des cycles de Hodge, les images en cohomologie étale sont invariants par $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ (cela découle de la propriété analogue pour les cycles algébriques, *cf. loc. cit.* 2.5).

On définit à partir des cycles motivés la notion de correspondance motivée (exemple : les projecteurs de Künneth), et leur composition. Cela permet de bâtir la catégorie monoïdale $\mathbb{Q}$-linéaire des motifs $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ modelés sur $\mathcal{V}$ en suivant la procédure usuelle, mais en remplaçant correspondances algébriques par correspondances motivées. On note $h(X)$ le motif attaché à $X$.

**12.2.1 Proposition** ([6]). *Cette catégorie $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ est tannakienne neutre, semi-simple, graduée, polarisée. Toute cohomologie classique* (*Betti, De Rham, étale*) *donne lieu à un foncteur fibre* (*réalisation*).

Pour tout plongement $\iota : k \subset \mathbb{C}$, la sous-catégorie tannakienne $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(M)$ de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ engendrée par un objet $M$ arbitraire est donc équivalente, via la réalisation de Betti, à la catégorie tannakienne des représentations d'un sous-$\mathbb{Q}$-groupe réductif $G_{\mathrm{mot}}(M)$ de $\mathrm{GL}(H_{\mathrm{B}}(M_{\mathbb{C}}))$, le groupe de Galois motivique de $M$ (relatif à $\iota$).

La catégorie des motifs d'Artin est la sous-catégorie abélienne (qui est tannakienne) engendrée par les $h(\mathrm{Spec}\, k')$, où est une extension finie de $k$.

Tout comme pour la catégorie des motifs homologiques de Grothendieck, les réalisations de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ s'enrichissent naturellement en des foncteurs fibres à valeurs dans des catégories d'espaces vectoriels munis de structures supplémentaires :

– la réalisation de Betti s'enrichit en un foncteur à valeurs dans les structures de Hodge rationnelles polarisables,

– la réalisation de De Rham s'enrichit en un foncteur à valeurs dans les $k$-vectoriels filtrés (filtration de Hodge),

– la réalisation étale $p$-adique s'enrichit en un foncteur à valeurs dans les $\mathbb{Q}_p$-vectoriels munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

**12.3 Frobenius cristallin.** Supposons à présent $k$ de type fini sur $\mathbb{Q}$. Pour $X \in \mathcal{V}$ fixé, soit $\mathfrak{o}$ une $\mathbb{Z}$-algèbre lisse intègre (donc de type fini), de corps des fractions $k$, telle que $X$ provienne d'un $\mathfrak{o}$-schéma projectif lisse $\mathfrak{X}$ (il en existe). Pour tout $m \geq 0$, $X^m$ provient alors du $\mathfrak{o}$-schéma projectif lisse $m$-ième puissance fibrée de $\mathfrak{X}$ sur $\mathrm{Spec}\, \mathfrak{o}$. Si $M$ est un motif découpé sur une puissance de $X$, on dira alors abusivement que $M$ "*a bonne réduction*" sur $\mathfrak{o}$.

Soit $v$ un idéal maximal de $\mathfrak{o}$, de caractéristique résiduelle $p = p_v$. Soient $W_v$ l'anneau de Witt du corps résiduel $\kappa_v$, $K_v$ son corps de fractions, $\sigma_v$ son automorphisme de Frobenius, $\bar{K}_v$ une clôture algébrique fixée de $K_v$.

Comme $\mathfrak{o}$ est lisse sur $\mathbb{Z}$, l'homomorphisme $\mathfrak{o} \to \kappa_v$ se relève en un homomorphisme injectif $\iota_v : \mathfrak{o} \hookrightarrow W_v$ (non unique).

La cohomologie cristalline de $H_{\mathrm{cris}}(\mathfrak{X} \otimes \kappa_v, W_v)$ est munie d'une action $\sigma_v$-linéaire de Frobenius (Frobenius cristallin). Le $K_v$-espace qui s'en déduit en inversant $p$, muni de Frobenius, dépend de $v$ et de $X$ mais est indépendant du choix du modèle $\mathfrak{X}$ (et de $\iota$) ; on le note $(H_{\mathrm{cris},v}(X), \varphi_{X,v})$ ($\varphi_{X,v}$ est d'ailleurs bijectif).

Pour tout choix de $\iota_v$, l'isomorphisme de Berthelot

$$H_{\mathrm{DR}}(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathfrak{o}} W_v \to H_{\mathrm{cris}}(\mathfrak{X} \otimes \kappa_v, W_v),$$

munit $H_{\mathrm{DR}}(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathfrak{o}} W_v$ d'une action $\sigma_v$-linéaire par transport de structure. On note

$$\mathrm{comp}_{DR,\mathrm{cris},\iota_v} : H_{\mathrm{DR}}(X) \otimes_k K_v \cong H_{\mathrm{cris},v}(X)$$

l'isomorphisme qui s'en déduit, et $\varphi_{X,\iota_v}$ l'endomorphisme $\sigma_v$-linéaire de $H_{\mathrm{DR}}(X) \otimes_k K_v$ déduit de $\varphi_{X,v}$ (il dépend de $\iota_v$ et de $X$, mais pas du modèle $\mathfrak{X}$).

**12.3.1 Proposition** ([6, 2.5.2]). *Pour tout cycle motivé $\xi \in A^r_{\mathrm{mot}}(X)$ et pour tout $\iota_v$ comme ci-dessus, l'image de $\xi$ dans $H^{2r}_{DR}(X)(r) \otimes_k K_v$ est invariante sous $\varphi_{X,\iota_v}$ (on rappelle que le "twist" $(r)$ multiplie $\varphi_{X,\iota_v}$ par un facteur $p^{-r}$).*

La difficulté réside dans l'éventualité[21] où les variétés auxiliaires $Y \in \mathcal{V}$ intervenant dans la définition de $\xi$ n'ont pas bonne réduction en $\mathfrak{o}$. La preuve de *loc. cit.* utilise la $K_v$-algèbre de Fontaine $B_{\mathrm{cris},K_v}$ (muni de son action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$, de son Frobenius et de sa filtration canonique), et l'isomorphisme de comparaison compatible à ces structures

$$\mathrm{comp}_{\text{ét},\mathrm{DR},\bar{\iota_v}} : H_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris},K_v} \to H_{\mathrm{DR}}(X) \otimes_k B_{\mathrm{cris},K_v}$$

qui dépend du choix d'un plongement $\bar{\iota_v} : \bar{k} \hookrightarrow \bar{K}_v$ au-dessus de $\iota_v$. Au paragraphe suivant, on utilisera le fait que $\mathrm{comp}_{\text{ét},\mathrm{DR},\bar{\iota_v}}$ envoie le $\mathbb{Q}_p$-espace

$$(H^{2r}_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p)(r))^{\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)}$$

bijectivement sur

$$(\mathrm{Fil}^0(H^{2r}_{\mathrm{DR}}(X)(r)) \otimes_k K_v)^{\varphi_{X,\iota_v}}.$$

**12.3.2 Corollaire.** *Sur la sous-catégorie de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ formée des motifs à bonne réduction sur $\mathfrak{o}$, on peut définir pour tout idéal maximal $v$ de $\mathfrak{o}$ un foncteur fibre[22] $H_{\mathrm{cris},v}$ à valeurs dans les $K_v$-vectoriels munis d'un endomorphisme $\sigma_v$-linéaire, vérifiant $H_{\mathrm{cris},v}(h(X)) = H_{\mathrm{cris},v}(X)$ (pour tout $X$ à bonne réduction sur $\mathfrak{o}$).* □

[21] pour nos applications, on peut l'éviter car ces variétés auxiliaires interviendront en nombre fini, et on peut toujours rétrécir $\mathfrak{o}$ en conséquence

[22] bien défini à isomorphisme canonique près

# 13 Anneaux semi-simples motiviques

**13.1 Digression sur les anneaux semi-simples dans une catégorie tannakienne neutre.** Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tannakienne neutre sur un corps $K$ de caractéristique nulle. Soit $A$ un anneau de $\mathcal{T}$. Il est automatiquement artinien. De même, l'anneau ordinaire $F(A)$ est artinien, pour tout foncteur fibre $F$ (à valeurs dans les vectoriels sur une extension de $K$). Un idéal simple de $A$ est un idéal (bilatère) $I$ qui, en tant qu'anneau de $\mathcal{T}$, n'admet pas d'idéal non nul distinct de $I$.

**13.1.1 Lemme.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$A$ n'a pas d'idéal nilpotent non nul,*

b) *$A$ est produit de ses idéaux simples,*

c) *$F(A)$ est semi-simple pour un (resp. pour tout) foncteur fibre $F$.*

*Si ces conditions sont vérifiées, on dit alors que $A$ est semi-simple.*

*Démonstration*. Notons a)$_F$ et b)$_F$ les propriétés analogues à a) et b) respectivement, avec $F(A)$ au lieu de $A$. Il est bien connu que a)$_F$ $\iff$ b)$_F$ $\iff$ $F(A)$ est semi-simple. Cette dernière condition est indépendante de $F$ : deux foncteurs fibres deviennent isomorphes après extension des corps des coefficients, et la semi-simplicité des algèbres est insensible à l'extension des scalaires puisque car $K = 0$.

Fixons donc un $F$ neutralisant $\mathcal{T}$, de sorte que les idéaux de $A$ correspondent aux idéaux de $F(A)$ stables sous le groupe tannakien $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$. Il est clair que a) $\iff$ a)$_F$, du fait que le radical nilpotent de $F(A)$ est stable sous $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$.

Par ailleurs, b)$_F$ $\implies$ b) : en effet $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ permute les idéaux simples de $A$. Donc tout idéal $J$ de $F(A)$ stable sous $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ et minimal pour cette propriété est produit d'idéaux simples, et $F(A)$ est produit de ces idéaux $J$.

Enfin, b) $\implies$ a) est clair. □

On prendra garde toutefois à ce qu'un idéal simple de $F(A)$ n'est pas nécessairement égal à l'image par $F$ d'un idéal simple de $A$ (même si $F$ neutralise $\mathcal{T}$).

**13.1.2 Remarques.** 1) Si $A$ est commutative, le groupe tannakien $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ agit nécessairement à travers un quotient fini $G$ (un groupe fini étale non nécessairement constant) sur la $K$-algèbre $F(A)$, qui est un produit fini d'extensions finies de $K$ : pour toute extension $K'/K$, on a $G(K') \subset \mathrm{Aut}_{K'\text{-alg}}(F(A) \otimes_K K')$.

En particulier, $A$ est un objet semi-simple de $\mathcal{T}$, et cet objet est isomorphe à $\mathbf{1}^n$ si $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ est connexe ($\mathbf{1}$ désignant l'unité de $\mathcal{T}$).

2) Sans supposer $A$ commutative, il n'est plus vrai qu'un anneau semi-simple dans $\mathcal{T}$ soit un objet semi-simple de $\mathcal{T}$ (considérer par exemple le End interne de la représentation standard de dimension 2 du groupe additif $\mathbb{G}_a$).

3) Un cas particulier intéressant d'anneau commutatif semi-simple se présente lorsque $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ est fini : à savoir $A = \mathcal{O}(\pi(\mathcal{T}))$, l'anneau correspondant au groupe fondamental "interne" $\pi(\mathcal{T})$ [21]. On a $F(A) = \mathcal{O}(\mathbf{Aut}^{\otimes} F)$, sur lequel $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ agit par conjugaison (*loc. cit.*). En particulier, $A \cong \mathbf{1}^n$ (en tant qu'objet de $\mathcal{T}$) si et seulement si $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ est abélien.

**13.2 Anneaux commutatifs semi-simples dans $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$.** Soit $A$ un anneau commutatif semi-simple dans la catégorie tannakienne neutre $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$. D'après ce qui précède, la réalisation de Betti $A_{\mathrm{B}}$ relative à un plongement $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ (*resp.* de De Rham $A_{\mathrm{DR}}$, *resp.* étale $p$-adique $A_{\text{ét}.p}$, *resp.* cristalline $A_{\mathrm{cris},v}$) est une algèbre commutative semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ (*resp.* $k$, *resp.* $\mathbb{Q}_p$, *resp.* $K_v$).

On choisit $\mathfrak{o}$ intègre de type fini sur $\mathbb{Z}$, de corps des fractions $k$, tel que $A$ ait bonne réduction sur $\mathfrak{o}$ (*cf.* 12.3). plus précisément, représentons $A$ comme découpé par une correspondance motivée $e$ sur une variété $Y \in \mathcal{V}$ admettant un modèle projectif lisse $\mathfrak{Y}$ sur $\mathfrak{o}$.

Comme on l'a vu, $A_{\mathrm{B}}$ est un produit de corps de nombres. On note $E$ le compositum des clôtures galoisiennes dans $\mathbb{C}$ des facteurs de $A_{\mathrm{B}}$ (relatives à $\mathbb{Q}$).

**13.2.1 Proposition.** *On suppose que $k$ contient $E$. Alors :*

1) $A_{DR} = \mathrm{Fil}^0 A_{DR}$.

2) *Tout idempotent de la $k$-algèbre commutative semi-simple $A_{DR}$ est, pour tout $k \overset{\iota_v}{\hookrightarrow} K_v$ comme ci-dessus, combinaison linéaire à coefficients*[23] *dans $E$ d'invariants sous le Frobenius cristallin $\varphi_{A,\iota_v}$ dans $A_{DR} \otimes_k K_v$.*

3) *Si en outre $A_{DR}$ est scindé, i.e. $A_{DR} \cong k^n$, alors le complété $E_v$ de $E$ (pour la place induite par le plongement dans $K_v$) scinde la $\mathbb{Q}_p$-algèbre $(A_{DR} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}}$, et $\varphi_{A,\iota_v}$ permute les idempotents minimaux de $A_{DR}$.*

4) *Si les idempotents minimaux de $A_{DR}$ s'étendent en des endomorphismes de $H_{DR}(\mathfrak{Y})$ (ce qui se produit toujours après localisation convenable de $\mathfrak{o}$), et si ce dernier est sans torsion, alors dans* 3)*, la permutation induite par $\varphi_{A,\iota_v}$ ne dépend que de $v$ (et de $A$, mais pas de $\iota_v$).*

*Démonstration.* Prouvons d'abord 2). L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $A_{\text{ét}.p}$ respecte la structure de $\mathbb{Q}_p$-algèbre, donc se factorise à travers un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (avec $n = [A_{\mathrm{B}} : \mathbb{Q}]$). Par Hermite–Minkowski, les homomorphismes $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{Spec}\,\mathfrak{o}) \to \mathfrak{S}_n$ sont en nombre fini. Il est loisible de remplacer $k = Frac(\mathfrak{o})$ par l'extension finie correspondant à l'intersection des noyaux de ces homomorphismes. Cela nous ramène au cas où $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit trivialement sur chaque $A_{\text{ét}.p}$. En particulier, pour tout plongement $\iota_v : k \hookrightarrow K_v$ comme ci-dessus, et pour tout plongement $\bar{\iota_v} : \bar{k} \hookrightarrow \bar{K}_v$ au-dessus de $\iota_v$, le groupe de Galois local $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ agit trivialement sur $A_{\text{ét}.p}$.

Considérons les isomorphismes de comparaison

$$A_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\mathrm{cris},K_v} \xrightarrow{\mathrm{comp}_{\mathrm{B},\text{ét}.p,\bar{\iota}} \otimes 1} A_{\text{ét}.p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris},K_v} \xrightarrow{\mathrm{comp}_{\text{ét},\mathrm{DR},\bar{\iota_v}}} A_{\mathrm{DR}} \otimes_k B_{\mathrm{cris},K_v}.$$

Comme ceux-ci respectent la structure d'algèbre, l'inverse du composé envoie tout idempotent $e$ de $A_{\mathrm{DR}}$ sur un idempotent de $A_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\mathrm{cris},K_v}$ qui se trouve nécessairement déjà dans $A_{\mathrm{B},\iota} \otimes_{\mathbb{Q}} E$ ($E$ étant plongé dans $K_v$ via $\iota_v$). On conclut que $e$ est dans le $E$-sous-espace de $A_{\mathrm{DR}} \otimes_k B_{\mathrm{cris},K_v}$ engendrée par l'image de $A_{\mathrm{B}}$. Comme

[23] dépendant, a priori, de $\iota_v$

$\mathrm{comp}_{\mathrm{B},et.p,\bar{\iota}}(A_{\mathrm{B}}) \subset (A_{\text{ét}.p})^{\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)}$, cette image est contenue dans $\mathrm{Fil}^0(A_{\mathrm{DR}}) \otimes K_v$ et est fixe sous $\varphi_{A,\iota_v}$.

Prouvons 1). On peut supposer, quitte à remplacer $k$ par une extension finie, que $A_{\mathrm{DR}} \cong k^{[A_{\mathrm{B}}:\mathbb{Q}]}$. Les idempotents de $A_{\mathrm{DR}}$ engendrent alors $A_{\mathrm{DR}}$ sur $k$, et sont dans $\mathrm{Fil}^0$ d'après la première assertion[24].

Prouvons 3). Si $k$ scinde $A_{\mathrm{DR}}$, les idempotents de $A_{\mathrm{DR}}$ engendrent $A_{\mathrm{DR}}$ comme $k$-vectoriel, donc $A_{\mathrm{DR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v$ comme $E_v$-vectoriel. Or par le point 2), ces idempotents sont dans $(A_{\mathrm{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v$. On a un isomorphisme canonique de $E_v$-algèbres

$$(A_{\mathrm{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v = E_v^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}((A_{\mathrm{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}}, E_v)}$$

et l'assertion en découle.

Prouvons enfin 4). Il suffit de montrer que la bijection

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A_{\mathrm{DR}}, k) \to \mathrm{Hom}_{K_v\text{-alg}}(A_{\mathrm{cris},v}, K_v)$$

induite par $\mathrm{comp}_{DR,\mathrm{cris},\iota_v}$ ne dépend que de $v$, et non de $\iota_v$. Pour cela, on remarque que cette dernière se factorise comme suit :

$$\mathrm{Hom}_k(A_{\mathrm{DR}}, k) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(eH_{\mathrm{DR}}(\mathfrak{Y}), \mathfrak{o}) \to \mathrm{Hom}_{\kappa_v}(eH_{\mathrm{DR}}(\mathfrak{Y} \otimes \kappa_v), \kappa_v) \to$$

$$\mathrm{Hom}_{\kappa_v}(eH_{\mathrm{cris},v}(\mathfrak{Y} \otimes \kappa_v), \kappa_v) \to \mathrm{Hom}_{W_v}(eH_{\mathrm{cris},v}(\mathfrak{Y}), W_v) \to \mathrm{Hom}_{K_v}(A_{\mathrm{cris},v}, K_v),$$

et que chacune de ces bijections ne dépend que de $v$. □

Ces résultats sont malheureusement insuffisants pour nos applications. Pour aller plus loin dans l'étude des Frobenius cristallins d'un anneau commutatif semi-simple $A$ dans $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$, nous sommes amenés à supposer que $A$ est un *motif d'Artin*. C'est conjecturalement[25] toujours le cas (quitte à agrandir $\mathcal{V}$), puisque le groupe de Galois motivique $G_{\mathrm{mot}}(A)$ est fini.

Supposons que $A_{\mathrm{DR}}$ soit scindé, d'où un isomorphisme canonique d'algèbres $A_{\mathrm{DR}} = k^{\mathrm{Hom}(A_{\mathrm{DR}},k)}$. Via $\mathrm{comp}_{\mathrm{B,DR}}$, $\mathrm{Hom}(A_{\mathrm{B}}, E)$ s'identifie alors à $\mathrm{Hom}_k(A_{\mathrm{DR}}, k)$, donc $A_{\mathrm{DR}} = k^{\mathrm{Hom}(A_{\mathrm{B}},E)}$.

On indexera en conséquence[26] les idempotents minimaux $e_\chi$ de $A_{\mathrm{DR}}$ par $\chi \in \mathrm{Hom}(A_{\mathrm{B}}, E)$ : $e_\chi(\chi') = \delta_{\chi,\chi'}$. On a une action canonique à droite de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ sur ces idempotents, donnée par $(e_\chi)^\sigma := e_{\sigma^{-1}\circ\chi}$.

**13.2.2 Proposition.** *Supposons que $A$ soit un motif d'Artin. Alors ni $A_B$ ni $E$ ne dépendent du plongement $\iota : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ choisi. Pour tout idéal maximal $v$ de $\mathfrak{o}$, notons $\mathfrak{p}_v$ le premier de $E$ correspondant.*

[24] on peut aussi déduire la seconde assertion de la connexité des groupes de Mumford-Tate

[25] cela découlerait tant de la conjecture de Hodge que de la conjecture de Tate

[26] la motivation pour cette indexation qui privilégie la réalisation de Betti est l'application ultérieure de 11.2.1 ii), qui fait appel à la rationalité en réalisation de Betti

*Alors pour tout $\iota_v : \mathfrak{o} \hookrightarrow W_v$ comme ci-dessus, la permutation des $e_\chi$ induite par le Frobenius cristallin $\varphi_{A,\iota_v}$ est donnée par*

$$\varphi_{A,\iota_v}(e_\chi) = e_{(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})\chi},$$

*où* $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q}) \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ *est le symbole d'Artin. En particulier, $\varphi_{A,\iota_v}$ respecte les* $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$*-orbites parmi les $e_\chi$.*

*Démonstration*. Quitte à remplacer $k$ par une extension finie, on peut supposer que $A$ - et par suite tout objet de $\mathcal{M}_\mathcal{V}(A)$ - est isomorphe à une somme de copies de **1** en tant qu'objet de $\mathcal{M}_\mathcal{V}$, donc que $G_{\mathrm{mot}}(A) = \{1\}$. Pour tout autre plongement $\iota' : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, les foncteurs fibres $H_{\mathrm{B},\iota}$ et $H_{\mathrm{B},\iota'}$ sur $\mathcal{M}_\mathcal{V}(A)$ sont alors isomorphes (via un unique isomorphisme), donc $A_\mathrm{B} = H_\mathrm{B}(\iota^* A)$ ne dépend pas de $\iota$ (ni a fortiori $E$).

Sur $\mathcal{M}_\mathcal{V}(A)$, on a par ailleurs une suite d'isomorphismes de foncteurs fibres

$$H_\mathrm{B} \otimes_\mathbb{Q} K_v \xrightarrow{\mathrm{comp}_{\mathrm{B,DR}}} H_{\mathrm{DR}} \otimes_k K_v \xrightarrow{\mathrm{comp}_{\mathrm{DR,\acute{e}t}.p,\bar\iota_v}} H_{\mathrm{\acute{e}t},p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_v \xrightarrow{\mathrm{comp}^{-1}_{\mathrm{B,\acute{e}t}.p,\bar\iota}} H_\mathrm{B} \otimes_\mathbb{Q} K_v$$

dont la composée est $G_{\mathrm{mot}}(A)(K_v)$, donc égale à l'identité. La composée des deux derniers isomorphismes, appliquée à $A$, identifie $(A_{\mathrm{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}}$ à $A_\mathrm{B} \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_p$.

Or par le point 3) de la proposition précédente, on a un isomorphisme canonique de $E_v$-algèbres

$$(A_{\mathrm{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v = E_v^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}((A_{\mathrm{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}}, E_v)}$$

qu'on peut aussi écrire (via $\mathrm{comp}_{\mathrm{DR,cris},\iota_v}$)

$$A_{\mathrm{cris},v}^{\varphi_{A,v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v = E_v^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(A_{\mathrm{cris},v}^{\varphi_{A,v}}, E_v)},$$

et sur $A_{\mathrm{cris},v}^{\varphi_{A,v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v$, l'action de $\varphi_{A,v}$ est celle de $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})$ sur les coefficients (le facteur $\otimes E_v$). D'où l'assertion. $\square$

## 14 Motifs et algèbre de Lie de Galois différentielle

**14.1 Groupe de monodromie et groupe de Galois motivique.** On reprend la situation et les notations $f : X \to S$, $\mathcal{H}_f$ de 11.1, en supposant $k$ plongeable dans $\mathbb{C}$.

Soit $s \in S(\mathbb{C})$. On note $G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ l'adhérence de Zariski de la représentation de monodromie (rationnelle) en $s$ :

$$\pi_1(S(\mathbb{C}), s) \to \mathrm{GL}(H_\mathrm{B}(X_s)) = \mathrm{GL}(H(X_s, \mathbb{Q})).$$

Sa composante neutre $G^0_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ est un groupe *semi-simple* d'après [20, 4.4] (voir aussi [4]).

**14.1.1 Théorème** ([6, 5.2]). *Supposons $k = \mathbb{C}$. Quitte à agrandir la classe $\mathcal{V}$, il existe un système local $(\Gamma_s)_{s \in S(\mathbb{C})}$ de sous-groupes algébriques réductifs de $\mathrm{GL}(H_B(X_s))$, tel que*

a) *pour tout* $s$, $G^0_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ *est un sous-groupe* normal *de* $\Gamma_s$,
b) *pour tout* $s$, $\Gamma_s$ *contient* $G_{\mathrm{mot}}(X_s)$,
c) *pour tout* $s$ *hors d'une partie maigre de* $S(\mathbb{C})$, $\Gamma_s = G_{\mathrm{mot}}(X_s)$.

C'est l'élaboration du fait que si un cycle motivé est invariant par monodromie, son transport parallèle en tout autre point est encore un cycle motivé (*loc. cit.*). (Le point c) ne sera utilisé qu'en 14.4.2 3)).

**14.1.2 Corollaire.** *Pour tout* $s \in S(\mathbb{C})$, $\mathrm{Lie}G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ *est normalisée par* $G_{\mathrm{mot}}(X_s)$, *donc est la réalisation de Betti d'un facteur direct* $LG_s$ *du motif* $\underline{\mathrm{End}}h(X_s)$. *Ce motif* $LG_s$ *est une algèbre de Lie dans la catégorie tannakienne* $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$.

L'existence de ce motif $LG_s$ jouera un rôle fondamental dans la suite. Il provient en fait d'un motif défini sur une extension finie du corps de rationalité de $s$ (*cf.* [6, 2.5, scolie]).

**14.2 Réalisation de De Rham de $LG_s$.** La réalisation de De Rham du motif $h(X_s)$ n'est autre que la fibre en $s$ de $\mathcal{H}_f$. Du fait de la régularité de la connexion de Gauss–Manin, l'isomorphisme de comparaison $\mathrm{comp}_{\mathrm{B,DR}}$ induit un isomorphisme

$$G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Gal}(\mathcal{H}_f, s)$$

entre le groupe de monodromie complexe en $s$ et le groupe de Galois différentiel pointé en $s$ de $\mathcal{H}_f$ (c'est un avatar de l'équivalence de Riemann–Hilbert de Deligne, *cf.* [39]). Comme $G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ est réductif, il suit que $\mathcal{H}_f$ est un module à connexion (intégrable) semi-simple.

De même, $\mathrm{comp}_{\mathrm{B,DR}}$ induit un isomorphisme entre $\mathrm{Lie}G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)_{\mathbb{C}}$ et la fibre en $s$ de l'algèbre de Lie de Galois différentielle $\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$ bâtie sur $\mathcal{H}_f$. Avec la notation du théorème précédent, on a en fait

$$\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)_s = H_{\mathrm{DR}}(LG_s).$$

(Ceci vaut encore sur le sous-corps de $\mathbb{C}$ sur lequel le motif $LG_s$ est défini).

**14.3 Digression : algèbres de Lie semi-simples dans une catégorie tannakienne neutre.** Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tannakienne neutre sur un corps $K$ de caractéristique nulle. On note $\mathbf{1}$ l'objet unité. Soit $L$ une algèbre de Lie dans $\mathcal{T}$. Le crochet de Lie $L \otimes L \to L$ correspond à un morphisme $L \to L^\vee \otimes L = \underline{\mathrm{End}}(L)$ (représentation adjointe). La composition des endomorphismes "internes" $\underline{\mathrm{End}}(L) \otimes \underline{\mathrm{End}}(L) \xrightarrow{\circ} \underline{\mathrm{End}}(L)$ induit alors un morphisme $L \otimes L \to \underline{\mathrm{End}}(L) \cong L \otimes L^\vee$, d'où finalement, en composant avec l'évaluation $L \otimes L^\vee \to \mathbf{1}$, une forme bilinéaire $\beta : L \otimes L \to \mathbf{1}$. Pour tout foncteur fibre $F$ (à valeurs dans les vectoriels sur une extension de $K$), $F(\beta)$ n'est autre que la forme de Killing de $F(L)$.

Un idéal simple de $L$ est un idéal (de Lie) $I$ qui, en tant qu'algèbre de Lie de $\mathcal{T}$, est non-commutative et n'admet pas de d'idéal non nul distinct de $I$. L'orthogonal de $I$ eu égard à $\beta$ est alors un idéal de $L$ dont l'intersection avec $I$ est réduite à 0 (cela se vérifie au moyen d'une foncteur fibre $F$).

**14.3.1 Lemme.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\beta$ est non-dégénérée (i.e. identifie $L$ à $L^\vee$),*

b) *$L$ est le produit de ses idéaux simples,*

c) *$F(L)$ est une algèbre de Lie semi-simple pour un (resp. pour tout) foncteur fibre $F$.*

*Si ces conditions sont vérifiées, on dit alors que $L$ est semi-simple.*

*Démonstration.* Même principe de démonstration que pour le lemme 13.1.1. On vient de voir que b) $\Longrightarrow$ a). La condition c) est indépendante de $F$, ce qui permet de choisir $F$ neutralisant $\mathcal{T}$. On a a) $\iff$ a)$_F$ $\iff$ b)$_F$ $\iff$ $F(L)$ est semi-simple. Enfin b)$_f$ $\Longrightarrow$ b) se voit comme en 13.1.1. □

On prendra garde toutefois à ce qu'un idéal simple de $F(L)$ n'est pas nécessairement l'image par $F$ d'un idéal simple de $L$ (même si $F$ neutralise $\mathcal{T}$).

**14.3.2 Remarques.** 1) On pourrait aussi définir la notion de radical d'une algèbre de Lie $L$ de $\mathcal{T}$ (plus grand idéal $R$ tel que le dérivé $n$-ième $D^n R = 0$ pour $n >> 0$) et montrer que $L$ est semi-simple si et seulement si $R = 0$.

2) En général, une algèbre de Lie semi-simple $L$ n'est pas un objet semi-simple de $\mathcal{T}$. Par exemple, l'algèbre de Lie semi-simple $sl_2$, vue comme représentation de $\mathbb{G}_a \subset SL_2$ par l'action adjointe, est un objet indécomposable, mais non semi-simple, dans la catégorie des représentations de $\mathbb{G}_a$.

3) Voici un cas particulier intéressant : si $\mathcal{T}$ est algébrique, on peut considérer l'algèbre de Lie du groupe fondamental "interne" $\pi(\mathcal{T})$ (*cf.* [21]). Si c'est une algèbre de Lie semi-simple de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ est semi-simple, et tout idéal simple de Lie$\pi(\mathcal{T})$ est un objet irréductible de $\mathcal{T}$.

Réciproquement, si $\mathcal{T}$ est semi-simple, alors Lie$\pi(\mathcal{T})$ est une algèbre de Lie semi-simple si et seulement si pour un (ou pour tout) foncteur fibre $F$, $F(\mathrm{Lie}\pi(\mathcal{T}))$ est une algèbre de Lie semi-simple au sens usuel. En revanche, si Lie$\pi(\mathcal{T})$ est simple, $F(\mathrm{Lie}\pi(\mathcal{T}))$ n'est pas nécessairement une algèbre de Lie simple au sens usuel.

Soit $L$ une algèbre de Lie semi-simple. On note $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{Lie}}L$ le sous-anneau de $L^\vee \otimes L = \underline{\mathrm{End}}(L)$ respectant le crochet de Lie. $L$ opère sur $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{Lie}}L$ (action adjointe).

**14.3.3 Définition.** On définit l'anneau $A(L)$ de $\mathcal{T}$ comme le commutant de $L$ dans $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{Lie}}(L)$.

**14.3.4 Lemme.** *Soit $L$ une algèbre de Lie semi-simple (resp. simple) dans $\mathcal{T}$. Alors $A(L)$ est un anneau commutatif semi-simple (resp. simple) dans $\mathcal{T}$. Pour tout foncteur fibre $F$, $F(A(L)) = A(F(L))$.*

*Démonstration.* La seconde assertion est immédiate. Via 13.1.1, elle ramène la première assertion (cas semi-simple) à l'assertion correspondante pour l'algèbre de Lie ordinaire $F(L)$. Quitte à étendre le corps $K'$ des coefficients de $F$, on peut supposer que dans la décomposition en idéaux simples de la $K'$-algèbre de Lie ordinaire $F(L) = \oplus_{j=1}^{j=n} L^{(j)}$, les $L^{(j)}$ sont absolument simples. Alors $F(A(L)) = A(F(L)) = \oplus A(F(L^{(j)})) \cong K'^n$.

Enfin, comme $L$ est produit de ses idéaux de Lie simples et $A$ est produit de ses idéaux simples, il est clair que "$L$ simple" équivaut à "$A$ simple". $\square$

**14.4 L'anneau semi-simple motivique $A(LG_s)$.** Appliquons ce qui précède à la catégorie tannakienne $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ sur $\mathbb{Q}$. Il suit de 14.2 et du lemme précédent que $LG_s$ est une algèbre de Lie semi-simple de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$, et que $A(LG_s)$ est un anneau commutatif semi-simple de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$.

**14.4.1 Remarque.** Il n'est pas difficile de montrer, à l'aide du théorème 14.1.1, que l'anneau motivique $A(LG_s)$ est indépendant de $s$ à isomorphisme près. Nous n'en aurons pas besoin.

Avant d'appliquer les résultats de 13.2, il nous faut redescendre du corps de base $\mathbb{C}$ à *un sous-corps $k$ de type fini sur* $\mathbb{Q}$. Quitte à passer à une extension finie d'un corps de définition pour $f$ et à remplacer $S$ par un revêtement étale fini, on peut supposer, et nous supposerons que

$(*)_{f,1}$ il existe un point $s \in S(k)$ tel que $\mathrm{Gal}(\mathcal{H}_f, s)$ soit connexe (ou, ce qui revient au même, que $G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ soit connexe, condition qui ne dépend pas de $s$).

On fixe alors $s \in S(k)$. Quitte à remplacer derechef $k$ par une extension finie, et à agrandir $\mathcal{V}$, on peut supposer, et nous supposerons que les conditions suivantes sont satisfaites :

$(*)_{f,2}$ $LG_s$ est un motif défini sur $k$, *i.e.* un objet de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$) ; donc $A(LG_s)$ aussi,

$(*)_{f,3}$ les idéaux simples de la k-algèbre de Lie $\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)_s = H_{\mathrm{DR}}(LG_s)$ sont absolument simples (ou, ce qui revient au même, $H_{\mathrm{DR}}(A(LG_s)) \cong k^n$),

$(*)_{f,4}$ $k$ contient le compositum $E$ des clôtures galoisiennes[27] des facteurs de la $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple $A(LG_s)_{\mathrm{B}} := H_{\mathrm{B}}(A(LG_s))$.

$(*)_{f,5}$ le groupe de Galois motivique $G_{\mathrm{mot}}(X_{s,\mathbb{C}})$ est *connexe*.

Sous ces hypothèses, $A(LG_s)_{\mathrm{DR}} = \big(\mathrm{End}_\nabla \mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)\big)_s \cong k^n$, et s'identifie canoniquement à $\mathrm{End}_\nabla \mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$. Les idempotents minimaux $e_\chi$ de $A(LG_s)_{\mathrm{DR}}$ découpent les idéaux de Lie simples de $\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$ (en tant qu'algèbre de Lie semi-simple dans la catégorie tannakienne - neutralisée par le foncteur fibre en $s$ - des modules à connexion intégrables sur $S$).

En outre, comme $G_{\mathrm{mot}}(X_{s,\mathbb{C}})$ agit sur $A(LG_{s,\mathbb{C}})$ à travers un quotient fini, il agit trivialement, *i.e.* $G_{\mathrm{mot}}(A(LG_{s,\mathbb{C}})) = \{1\}$ ; il en est alors de même en remplaçant $\mathbb{C}$ par une extension finie de $k$ convenable, et il s'ensuit que $A(LG_s)$ est un *motif d'Artin*. A fortiori, lorsque $\Xi$ parcourt les $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$-orbites d'idempotents $e_\chi$, les idempotents

[27] dans $\mathbb{C}$, relativement à $\mathbb{Q}$

$e_\Xi := \sum_{\sigma\in\Xi} e_{\sigma\chi}$ sont des correspondances motivées, qui découpent les idéaux simples de $LG_s$ (en tant qu'algèbre de Lie semi-simple dans la catégorie tannakienne neutre de motifs $\mathcal{M}_\mathcal{V}$).

La proposition suivante résume les propriétés qui nous servirons par la suite.

**14.4.2 Proposition.** 1) *Les endomorphismes horizontaux de $\mathcal{LG}_f(\mathcal{H}_f)$ préservent la filtration de Hodge.*

2) *Soit $\mathfrak{o}$ une $\mathbb{Z}$-algèbre lisse intègre de corps de fractions $k$ telle que $X_s$ provienne d'un $\mathfrak{o}$-schéma projectif lisse $\mathfrak{X}_\mathfrak{s}$.*

*Alors pour tout idéal maximal $v$ de $\mathfrak{o}$ et tout $\Xi$, tout plongement $\iota_v : \mathfrak{o} \hookrightarrow W_v = W(\kappa_v)$ relevant l'application canonique $\mathfrak{o} \to \kappa_v$, et tout $\chi \in \Xi$, le Frobenius cristallin de $e_\Xi(LG_s)$ vérifie la formule*

$$e_{(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})\chi} \circ \varphi_{e_\Xi(LG_s),\iota_v} = \varphi_{e_\Xi(LG_s),\iota_v} \circ e_\chi,$$

*où $\mathfrak{p}_v$ est le premier de $E$ induit par $v$.*

3) *Le compositum $E$ est un corps de nombres totalement réel.*

*Démonstration*. 1) découle de 13.2.1.1), ou plus simplement, du fait que $A(LG_s)_{\mathrm{DR}} = \mathrm{Fil}^0 A(LG_s)_{\mathrm{DR}}$ puisque $A(LG_s)$ est un motif d'Artin.

2) La formule s'écrit aussi $e_{(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})\chi} = \varphi_{e_\Xi A(LG_s),\iota_v}(e_\chi)$, ce qui résulte de 13.2.2.3) (appliqué à l'anneau simple $A = e_\Xi A(LG_s)$, et $Y = X_s \times_k X_s$).

3) On a $H_{\mathrm{B}}(LG_s) = \mathrm{Lie} G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$, et

$$A(LG_s)_{\mathrm{B}} = \mathrm{End}_{G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f,s)} H_{\mathrm{B}}(LG_s).$$

Lorsque $s$ varie, il forment des systèmes locaux de $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie et de $\mathbb{Q}$-algèbres respectivement. Ils ne changent donc pas, à isomorphisme près, lorsqu'on change $s$. Quitte à changer $s$, on peut alors supposer par le point c) de 14.1.1 que $\mathrm{Lie} G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ est un idéal de l'algèbre de Lie dérivée (semi-simple) $\mathrm{Lie} G_{\mathrm{mot}}(X_{s,\mathbb{C}})^{\mathrm{der}}$. Comme $\mathcal{M}_\mathcal{V}(X_s)$ est polarisée, tout idéal de Lie simple de $\mathrm{Lie} G_{\mathrm{mot}}(X_{s,\mathbb{C}})^{\mathrm{der}}_{\mathbb{C}}$ est défini sur $\mathbb{R}$ [28]. Il en est donc de même des idéaux simples de $H_{\mathrm{B}}(LG_s)_{\mathbb{C}}$, ce qui entraîne que tout homomorphisme (d'anneaux unitaires) $A(LG_s)_{\mathrm{B}} \to \mathbb{C}$ se factorise à travers $\mathbb{R}$, donc que $E$ est totalement réel. □

**14.4.3 Remarque.** Il n'est pas difficile de montrer, à l'aide du théorème 14.1.1, que si la condition $(*)_{f,5}$ est satisfaite pour $s$, elle l'est aussi pour tout point de $S(\mathbb{C})$ hors d'une partie maigre. Nous n'en aurons pas besoin.

Le point est le suivant : soit $\pi_0(\Gamma_s)$ le schéma en groupe fini des composantes connexes de $\Gamma_s$, pour $s \in S(\mathbb{C})$. Alors l'action de $G_{\mathrm{mot}}(X_s) \subset \Gamma_s$ sur $\mathcal{O}(\pi_0(\Gamma_s))$ est l'action par conjugaison, qui se factorise par $\pi_0 G_{\mathrm{mot}}(X_s)$. Sous $(*)_{f,1}$ (qu'il est loisible de supposer), il découle de 14.1.1 que l'anneau semi-simple de $\mathcal{M}_\mathcal{V}$ dont $\mathcal{O}(\pi_0(\Gamma_s))$ est la réalisation de Betti est indépendant de $s \in S(\mathbb{C})$, à isomorphisme près.

[28] cela découle par exemple du fait que la conjugaison complexe agit sur le graphe de Dynkin de $\mathrm{Lie} G_{\mathrm{mot}}(X_{s,\mathbb{C}})^{\mathrm{der}}$ par l'involution d'opposition, *cf.* [47, 8.5]

# 15 Une application du théorème de Mazur–Ogus

L'objectif de ce paragraphe est d'appliquer le théorème de Katz 11.4.1 aux réductions modulo $p$ des connexions $e_\chi(\mathcal{LG})$. Le théorème de Mazur–Ogus nous permettra de comprendre la relation entre $e_\chi$ et l'isomorphisme de Cartier inverse $C^{-1}$.

**15.1 Préparation.** Plaçons-nous dans la situation 11.1, avec $k$ de type fini sur $\mathbb{Q}$. On peut supposer $f$ à fibres connexes de dimension $d$. Sans perte de généralité, on suppose les conditions $(*)_{f,1}$ à $(*)_{f,4}$ satisfaites.

Par la dualité de Poincaré et Künneth, on identifie $\underline{\mathrm{End}}\mathcal{H}_f$ à $\mathcal{H}_{f^2}(d)$ de manière compatible aux connexion de Gauss–Manin et aux filtrations de Hodge[29], ce qui permet de voir $\mathcal{LG}$ comme un sous-objet de $\mathcal{H}_{f^2}(d)$. On identifie de même le motif $LG_s$ à un sous-motif de $h(X_s^2)(d)$.

Les sorites usuels sur les limites d'objets de présentation finie permettent de construire une $\mathbb{Z}$-algèbre lisse intègre $\mathfrak{o}$ de corps de fractions $k$, avec les propriétés suivantes :

$(**)_{f,1}$ le morphisme $f : X \to S$ provient d'un morphisme projectif lisse $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ de $\mathfrak{o}$-schémas lisses, avec $\mathfrak{S}$ affine, et $s$ s'étend en un $\mathfrak{o}$-point $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{S}$.

$(**)_{f,2}$ Les $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$-modules $H^j(\mathfrak{X}, \Omega^i_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}})$ sont localement libres.

Cette condition entraîne que la suite spectrale de Hodge–De Rham dégénère en $E_1$, et que $\mathcal{H}_{\mathfrak{f}} := \oplus_q \mathbb{R}^q\mathfrak{f}_*\Omega^*_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}}$ est localement libre ; il est muni de sa connexion de Gauss–Manin, et de sa filtration de Hodge (dont les gradués sont localement libres par hypothèse).

Il en découle aussi que l'isomorphisme choisi $\underline{\mathrm{End}}\mathcal{H}_f \cong \mathcal{H}_{f^2}(d)$ s'étend en $\underline{\mathrm{End}}\,\mathcal{H}_{\mathfrak{f}} \cong \mathcal{H}_{\mathfrak{f}^2}(d)$.

$(**)_{f,3}$ Tout $e_\chi$ s'étend en un endomorphisme de $\underline{\mathrm{End}}\mathcal{H}_{\mathfrak{f}}$, encore noté $e_\chi$.

Il est nécessairement idempotent, horizontal, et préservant la filtration de Hodge puisque c'est vrai sur $k$ (*cf.* théorème 14.4.2, point 2). Il découle de $(**)_{f,3}$ que $\mathcal{LG}$ provient du facteur direct $\mathfrak{LG} := \oplus e_\chi\left(\underline{\mathrm{End}}\mathcal{H}_{\mathfrak{f}}\right)$ de $\underline{\mathrm{End}}\mathcal{H}_{\mathfrak{f}}$.

**15.2 Frobenius relatif.** Fixons un plongement $\iota_v : \mathfrak{o} \hookrightarrow W_v = W(\kappa_v)$. Notons $p_v$ la caractéristique résiduelle, $\hat{\mathfrak{S}}$ le complété $p_v$-adique de $\mathfrak{S}\otimes_{\mathfrak{o}} W_v$. On a un isomorphisme canonique entre $\mathcal{H}_{\mathfrak{f}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}}$ et la cohomologie cristalline de $\mathfrak{X}\otimes\kappa_v$ relative à $\hat{\mathfrak{S}}$ [13]. Pour tout relèvement $\sigma_v$-linéaire $\varphi : \hat{\mathfrak{S}} \to \hat{\mathfrak{S}}$ du Frobenius absolu $F_{\mathfrak{S}\otimes\kappa_v}$, l'action du Frobenius relatif cristallin induit alors un endomorphisme horizontal injectif

$$\Phi : \mathcal{H}_{\mathfrak{f}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \varphi^*\mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{f}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}}.$$

Par ailleurs, quitte à rétrécir le schéma affine $\mathfrak{S}$ autour de $\mathfrak{s}$, on sait qu'il existe $\varphi$ tel que $s$ soit un point de Teichmüller pour $\varphi$ : $\sigma_v \circ \mathfrak{s}^* = \mathfrak{s}^* \circ \varphi^*$ [44, 3.11]. C'est celui qu'on choisira. La fibre en $s$ de $\Phi$ coïncide alors, après inversion de $p_v$, avec le Frobenius cristallin sur $H_{\mathrm{DR}}(X_s) \otimes_k K_v$.

[29] le twist est là pour éviter le décalage de la filtration de Hodge

Appliquons $\Phi$ au End interne de $\mathcal{H}_{\mathfrak{f}}$ (en notant que $e_\chi$ agit sur $\mathcal{H}_{\mathfrak{f}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \varphi^*\mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}}$ par transport de structure). Avec les notations de 14.4.2 3) :

**15.2.1 Proposition.** $\Phi$ *induit des endomorphismes horizontaux*

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \varphi^*\mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}} &\to (\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}}\,,\\ e_\Xi(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \varphi^*\mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}} &\to e_\Xi(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}}\,,\\ e_\chi(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \varphi^*\mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}} &\to e_{(\mathfrak{p}_v,E/\mathbb{Q})\chi}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}}\,.\end{aligned}$$

*Démonstration.* Comme $\Phi$ est horizontal, il suffit de vérifier ces assertions au point fixe $s$ de $\varphi$, et après inversion de $p_v$. Ces deux premières assertions sont alors conséquence, par 12.3.1, de ce que $LG_s$ et $e_\Xi(LG_s)$ sont des motifs. La dernière résulte du point 2) de 14.4.2 (qui s'applique grâce à l'hypothèse $(**)_{f,3}$). $\square$

**15.3 Le théorème de Mazur–Ogus.** Il dit ceci (avec les notations de 11.3) :

**15.3.1 Théorème** ([13, 8.28.3]). *Pour tout $i$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \Phi^{-1}\big(p_v^i\mathcal{H}_{\mathfrak{f}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}}\big) \arrow[r] \arrow[d, "p_v^{-i}\Phi"'] & F^*_{\mathfrak{S}\otimes\kappa_v} Gr^{i-1}\mathcal{H}_{\mathfrak{f}\otimes\kappa_v} \arrow[d, "C^{-1}"'] \\ p_v^{-i}\big(\mathrm{Im}\,\Phi \cap p^i\mathcal{H}_{\mathfrak{f}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \mathcal{O}_{\hat{\mathfrak{S}}}\big) \arrow[r] & Gr_{i-1}\mathcal{H}_{\mathfrak{f}\otimes\kappa_v} \end{tikzcd}$$

*est commutatif* (*les applications horizontales étant induites par la réduction modulo $p_v$ et le passage aux gradués*).

**15.4 Application.** On l'applique en substituant $f^2$ à $f$ (ou, si l'on préfère, en prenant le End interne). Par la proposition précédente, on en déduit que l'isomorphisme de Cartier inverse $C^{-1}$ envoie le facteur

$$F^*_{\mathfrak{S}\otimes\kappa_v} Gr^i\big(e_\chi(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v\big)$$

sur le facteur

$$Gr_i\big(e_{(\mathfrak{p}_v,E/\mathbb{Q})\chi}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v\big).$$

**15.4.1 Remarque.** Cela donne une nouvelle preuve que $\mathfrak{p}_v$ ne dépend pas de $\iota_v$. Par ailleurs, cela est valable pour le schéma affine $\mathfrak{S}$ d'origine, même si on l'a établi en localisant provisoirement pour disposer de $\varphi$.

On peut alors appliquer le théorème de Katz 11.4.1 (en remplaçant $k$ par $\kappa_v$, $f$ par le carré de $\mathfrak{f} \otimes \kappa_v$ et en notant que l'hypothèse $(*)$ modulo $v$ figurant dans 11.4.1 découle de l'hypothèse $(**)_{f,2}$), en prenant

$$\mathcal{M} = e_{(\mathfrak{p}_v,E/\mathbb{Q})\chi}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v, \quad \mathcal{M}' = e_\chi(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v,$$

ce qui donne :

**15.4.2 Théorème.** *Sous les hypothèses* $(*)_{f,i}$ *et* $(**)_{f,i}$*, les conditions suivantes sont équivalentes, pour tout idéal maximal* $v$ *de* $\mathfrak{o}$ *:*

a) *les* $Gr_i R_{p_v}$ *sur* $e_{(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})\chi}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v$ *s'annulent,*

b) *les* $Gr^i \nabla$ *sur* $e_\chi(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v$ *s'annulent,*

c) *la filtration de Hodge de* $e_\chi(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v$ *est horizontale.* □

(Rappelons que $E \subset k$ est le compositum des clôtures galoisiennes des facteurs de $A(LG_s)_{\mathrm{B}}$, et que $\mathfrak{p}_v$ est le premier de $E$ induit par $v$).

**15.5 Quelques sous-ensembles de Gal($E/\mathbb{Q}$).** Il est commode de reformuler ce résultat, dans le cadre global de 15.1, en introduisant les sous-ensembles suivants de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, indexés par un ensemble $V$ arbitraire non vide d'idéaux maximaux de $\mathfrak{o}$ :

$$\Sigma_V = \{\sigma |\ \text{les } Gr_i R_{p_v} \text{ s'annulent sur } e_{\sigma\chi}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v \text{ pour tout } v \in v\}$$

$$\mathrm{T}_V = \{\tau |\ \text{les } Gr^i \nabla \text{ s'annulent sur } e_{\tau\chi}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v \text{ pour tout } v \in v\}$$

Supposons que *tous les* $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})$ *soient égaux* $(v \in V)$, et notons $\theta_V$ cet élément. Alors 15.4.2 se reformule comme une double inclusion :

$$\theta_V^{-1} \circ \Sigma_V \subset \mathrm{T}_V, \quad \theta_V \circ \mathrm{T}_V \subset \Sigma_V.$$

Par ailleurs, posons

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \{\tau \mid \text{ les } Gr^i \nabla \text{ s'annulent sur } e_{\tau\chi}(\mathfrak{L}\mathfrak{G})\} \\ &= \{\tau \mid \text{ la filtration de Hodge de } e_{\tau\chi}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \text{ est horizontale}\}, \end{aligned}$$

et remarquons que $\mathrm{T}_V = \mathrm{T}$ dès que $V$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Spec}\,\mathfrak{o}$. On en déduit

**15.5.1 Corollaire.** $\theta_V \circ \mathrm{T} \subset \Sigma_V$. *Si* $V$ *est Zariski-dense dans* $\mathrm{Spec}\,\mathfrak{o}$*,* $\theta_V^{-1} \circ \Sigma_V \subset \mathrm{T}$.

(Si $k$ est un corps de nombres, “Zariski-dense” équivaut à “infini”).

On peut raffiner la première inclusion en introduisant le sous-ensemble

$$\Sigma'_V = \{\sigma |\ R_{p_v} \text{ s'annule sur } e_{\sigma\chi}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \otimes \kappa_v \text{ pour tout } v \in \mathrm{V}\} \subset \Sigma_V.$$

**15.5.2 Variante.** $\theta_V \circ \mathrm{T} \subset \Sigma'_V$. *Si* $V$ *est Zariski-dense dans* $\mathrm{Spec}\,\mathfrak{o}$*,* $\Sigma_V = \Sigma'_V$.

(Ceci répond partiellement à la question évoquée après 11.4.1).

*Démonstration*. On a vu (14.4) que les idempotents $e_\chi$ découpent les idéaux de Lie simples de $\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$ (en tant qu'algèbre de Lie semi-simple dans la catégorie tannakienne semi-simple de modules à connexion $S$ engendrée par elle-même). Comme $\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$ n'est autre que l'algèbre de Lie du groupe tannakien, on déduit de la remarque 14.3.2 3) que les $e_\chi \mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$ sont simples en tant que modules à connexion[30].

[30] en termes plus concrets, on exprime ici le fait que les idéaux de Lie simples de $\mathrm{Lie}G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ sont des représentations irréductibles de $G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$

Il s'ensuit que si $\tau \in$ T, la filtration de Hodge de $e_{\tau\chi}(\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f))$ n'a qu'un cran : $\mathrm{Fil}^0 = e_{\tau\chi}\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$, $\mathrm{Fil}^1 = 0$. Alors par 15.5.1,il en est de même de filtration conjuguée de $e_{\theta_V\tau\chi}\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f) \otimes \kappa_v$ pour tout $v \in V$, et on conclut que $\theta_V \circ \tau \in \Sigma'_V$.

Si $V$ est Zariski-dense dans Spec $\mathfrak{o}$, on a alors $\Sigma_V = \theta_V \circ (\theta_V^{-1} \circ \Sigma_V) \subset \Sigma'_V$, d'où finalement $\Sigma_V = \Sigma'_V$. □

## 16 Conjecture de Grothendieck–Katz et problème de Dwork pour les connexions d'origine géométrique

**16.1 Connexions d'origine géométrique.** Rappelons la définition que nous adoptons. Soit $S$ une variété algébrique lisse géométriquement connexe sur un corps $k$ de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{M}$ un module à connexion (intégrable) sur $S$.

**16.1.1 Définition.** $\mathcal{M}$ est dit *d'origine géométrique* s'il existe $S' \to S$ étale dominant tel que $\mathcal{M}_{S'}$ soit extension successive de sous-quotients de connexions de Gauss–Manin attachées à des morphismes lisses $f$ de but $S'$. On note $MC_{\text{géom}}(S)$ la catégorie $k$-linéaire formée de ces connexions.

**16.1.2 Remarques.** 1) La définition ne dépend que de la fibre générique géométrique de $\mathcal{M}$.

2) Dans cette définition, on peut supposer que les morphismes $f$ sont *projectifs*. Commençons par nous ramener au cas propre. Quitte à modifier $S'$, on sait d'après Hironaka, que $f : X' \to S$ s'étend en un morphisme propre lisse $\bar{f} : \bar{X}' \to S$ et $\partial X' = \bar{X}' \setminus X'$ est un diviseur à croisements normaux stricts relativement à $S'$. On raisonne alors par récurrence sur la dimension relative de $f$ et sur le nombre de composantes irréductibles de $\partial X'$, en utilisant la suite exacte du résidu (Gysin), *cf.* [3, ch. 2][31]. Pour passer du cas propre au cas projectif, on peut, quitte à remplacer $S$ par un ouvert dense, trouver par le lemme de Chow et la résolution des singularités un $S$-schéma projectif $\bar{X}'' \xrightarrow{\varepsilon} \bar{X}' \to S$ qui domine $\bar{X}'$, et $\varepsilon^* : \mathcal{H}_{\bar{f}} \to \mathcal{H}_{\bar{f}'}$ est alors injective.

3) Via Künneth et dualité de Poincaré (disponible compte tenu de la remarque précédente), il n'est pas difficile de voir que $MC_{\text{géom}}(S)$ est une sous-catégorie tannakienne de la catégorie tannakienne des connexions intégrables sur $S$.

4) (non utilisé dans ce texte) Tout morphisme (*resp.* morphisme lisse) de type fini $g : S_1 \to S_2$ induit des foncteurs $g^* : MC_{\text{géom}}(S_2) \to MC_{\text{géom}}(S_1)$ (*resp.* $R^i_{\mathrm{DR}} g_* : MC_{\text{géom}}(S_1) \to MC_{\text{géom}}(S_2)$), *loc. cit.*

5) Si $k$ est un corps de nombres, toute connexion d'origine géométrique est une $G$-connexion (cf. [3, IV], [9]). La réciproque est une (variante d'une) *conjecture de Bombieri–Dwork*.

[31] la définition ci-dessus est légèrement plus générale que celle adoptée dans [3], mais les mêmes arguments s'appliquent

**16.2 Conclusion.** Supposons $k$ de type fini sur $\mathbb{Q}$. Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif lisse tel que

($\bullet$) *pour une fibre complexe $X_s$ au moins, le groupe de Galois motivique $G_{\mathrm{mot}}(X_s)$ soit connexe.*

Rappelons qu'on a attaché à $f$ (après une éventuelle extension finie de $k$) le *corps de nombres totalement réel $E \subset k$, galoisien sur $\mathbb{Q}$.*

Pour tout point fermé $v \in \operatorname{Spec} \mathfrak{o}$, on continue à noter $\mathfrak{p}_v$ (*resp.* $p_v$) le premier de $E$ induit par $v$ (*resp.* la caractéristique résiduelle).

**16.2.1 Théorème.** *Soit $\mathcal{M}$ un objet dans la catégorie tannakienne des modules à connexion sur $S$ engendrée par $\mathcal{H}_f$. Quitte à localiser $\mathfrak{o}$, on peut supposer que $\mathcal{M}$ se prolonge en un module localement libre à connexion $\mathfrak{M}$ sur un modèle de $S$ sur $\mathfrak{o}$.*

1) *Soit $\theta$ un élément* $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$*. Supposons qu'il existe un ensemble Zariski-dense de points fermés $v \in \operatorname{Spec} \mathfrak{o}$ tels que $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q}) = \theta$ et $R_{p_v}(\mathfrak{M} \otimes \kappa_v) = 0$. Alors (quitte à localiser davantage $\mathfrak{o}$) $R_{p_v}(\mathfrak{M} \otimes \kappa_v) = 0$ pour tout $v$ tel que $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q}) = \theta$ .*

2) *Supposons que pour tout $\theta \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, il existe un ensemble Zariski-dense de points fermés $v \in \operatorname{Spec} \mathfrak{o}$ tels que $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q}) = \theta$ et $R_{p_v}(\mathfrak{M} \otimes \kappa_v) = 0$. Alors $\mathcal{M}$ est isotrivial.*

*Démonstration*. Comme la catégorie tannakienne des modules à connexion sur $S$ engendrée par $\mathcal{H}_f$ est semi-simple, par Künneth dualité de Poincaré, au cas d'un facteur direct $\mathcal{M} = e\mathcal{H}_f$ de $\mathcal{H}_f$. Soit $\boldsymbol{P}_{E,\theta}$ l'ensemble des premiers $\mathfrak{p}$ non ramifiés de $E$ tels que $(\mathfrak{p}, E/\mathbb{Q}) = \theta$ et considérons l'algèbre de Lie $\boldsymbol{P}_{E,\theta}$-$\mathcal{C}(\mathcal{M})$ dans $MIC_S$, définie comme dans la remarque 3.2.5. Comme $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ est semi-simple, on a $\boldsymbol{P}_{E,\theta}$-$\mathcal{C}(\mathcal{M}) \cong \boldsymbol{P}_{E,\theta}$-$\mathcal{C}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}))$ en vertu de la proposition 3.2.4 et de 3.2.5. Il revient donc au même de démontrer 1) (*resp.* 2)) ou de démontrer l'assertion correspondante pour chaque facteur simple de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ (ces derniers sont des facteurs simples $e_\chi \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$ de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$).

On peut se placer dans la situation où toutes les hypothèses $(*)_{f,i}$ et $(**)_{f,i}$ sont satisfaites. Fixons donc $\chi$, dont on note $\Xi$ l'orbite sous $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, et examinons le facteur simple $e_\chi \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$.

Preuve de 1). Soit $V^\theta$ l'ensemble des points fermés $v \in \operatorname{Spec} \mathfrak{o}$ tels que $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q}) = \theta$ et $1 \in \Sigma_{V^\theta}$. Par hypothèse, $V^\theta$ est Zariski-dense. Par 15.5.1, on a donc $\theta^{-1} \in \mathrm{T}$, et par 15.5.2, $1 \in \Sigma'_{V^\theta}$. Ceci établit l'assertion.

Preuve de 2). D'après ce qu'on vient de voir, l'hypothèse de 2) entraîne que $\mathrm{T} = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. On conclut en appliquant 11.2.1 que $e_\chi \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$, donc $\mathcal{M}$, est isotrivial.$\square$

**16.2.2 Corollaire.** *Il existe un sous-ensemble $\Theta \subset \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ ayant les propriétés suivantes :*

i) *Soit $\boldsymbol{P}$ l'ensemble des nombres premiers non ramifiés dans $E$ tels que $(p, E/\mathbb{Q})$ soit contenu dans la classe de conjugaison de $\Theta$. Alors $\boldsymbol{P}$-$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$, et tout ensemble $\boldsymbol{P}'$ de nombres premiers tel que $\boldsymbol{P}'$-$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$ est contenu, à un ensemble fini près, dans $\boldsymbol{P}$. En particulier, $\boldsymbol{P}'$ a une densité qui est un nombre rationnel.*

ii) *Si $k$ est un corps de nombres, l'ensemble des places finies $v$ telles que les $v$-courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent est, à un ensemble fini près, l'ensemble des places finies telles que* $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q}) \in \Theta$ *. En particulier, l'ensemble de ces places a une "densité" au sens de* 5.1 *qui est un nombre rationnel* (5.1.4).

Cela répond positivement à la question de Dwork, dans le cas des connexions semi-simples d'origine géométrique (du moins sous l'hypothèse technique ($\bullet$)).

**16.2.3 Notation.** Notons $MC'_{\text{géom}}(S)$ la plus petite sous-catégorie tannakienne de $MC_{\text{géom}}(S)$ stable par extension et contenant les $\mathcal{H}_f$ avec $f$ vérifiant ($\bullet$).

**16.2.4 Corollaire.** *Tout objet de $MC'_{\text{géom}}(S)$ a la propriété de Grothendieck–Katz.*

*Démonstration*. Par la remarque 16.1.2.2 et le corollaire 4.3.3, la conjecture de Grothendieck–Katz pour $MC'_{\text{géom}}(S)$ se ramène à prouver la propriété de Grothendieck–Katz pour les $\mathcal{H}_f$ avec $f : X \to S$ projectif lisse vérifiant ($\bullet$), et ensuite (par le théorème 4.3.1) à prouver que les facteurs simples $e_\chi(\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f))$ de $\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)$ ont une infinité de $p$-courbures non nulles. Il suffit donc de montrer que pour tout $\mathcal{M}$ comme dans 16.2.1, s'il existe un ensemble $\boldsymbol{P}$ de nombres premiers de densité 1 tel que $R_{p_v}(\mathcal{M} \otimes \kappa_v) = 0$ pour tout $v$ tel que $p_v \in \boldsymbol{P}$, l'hypothèse de 16.2.1 est alors satisfaite ; cela suit immédiatement du théorème de Chebotarev (pour $\mathcal{M}$ comme en 16.2.1, $\boldsymbol{P}$ de densité $> 1 - \frac{1}{[E:\mathbb{Q}]}$ suffirait. L'exemple suivant montre que cette borne est optimale). $\square$

**16.3 Exemple.** La condition du point 2) du théorème est optimale. En effet, soit $F$ une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps $E$ totalement réel galoisien sur $\mathbb{Q}$ (et distinct de $\mathbb{Q}$). D'après G. Shimura [48], il existe des schémas abéliens polarisés $f : X \to S$ non isotriviaux de dimension relative $[F : \mathbb{Q}]$, de fibre générique absolument simple, tels que $\mathrm{End}_S X = F$, et tels que pour tout automorphisme $\tau$ de $F$ distinct de l'identité et de la conjugaison complexe, $R^1 f_*^{\mathrm{an}}\mathbb{Q} \otimes_{F,\tau} \mathbb{C}$ soit purement de type de Hodge $(1, 0)$ ou $(0, 1)$. Il n'est pas difficile de voir que $G_{\mathrm{mono}}(\mathcal{H}_f)$, supposé connexe, est alors de la forme $\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} SU_2$ (restriction des scalaires à la Weil), de sorte que $E$ coïncide avec le corps noté $E$ plus haut (et $\mathcal{LG}(\mathcal{H}_f)_s \cong sl_2^{\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})}$).

La condition ($\bullet$) est réalisée, du moins si $\mathcal{V}$ est assez grand, car alors les groupes de Galois motiviques des variétés abéliennes (les fibres complexes de $f$) coïncident avec leurs groupes de Mumford-Tate, qui sont connexes, *cf.* [6].

Comme dans la preuve du théorème, on montre que pour $p$ assez grand, la $p$-courbure du facteur de $\mathcal{H}_f^1 = H^1_{\mathrm{DR}}(X/S)$ où $F$ agit à travers l'identité est nulle si et seulement si pour tout $\mathfrak{p}$ au-dessus de $p$, l'automorphisme de Frobenius $(\mathfrak{p}, E/\mathbb{Q})$ est distinct de l'identité. La densité de tels $p$ est $1 - \frac{1}{[E:\mathbb{Q}]}$ d'après Chebotarev.

Dans le cas où $F$ est un corps cyclotomique, on pourrait du reste construire de telles familles à partir de la jacobienne d'un pinceau de courbes "de type hypergéométrique" convenable sur $\mathbb{Q}(x)$ (d'équation affine $v^N = u^a(u-1)^b(u-x)^c$ ), ce qui nous ramènerait à l'exemple 0.3.1) ).

**16.3.1 Remarques.** 1) Une variante de la démonstration du point 1) de 16.2.1 donne l'énoncé suivant, pour tout entier naturel $n$ : *supposons qu'il existe un ensemble Zariski-dense de points fermés* $v \in \operatorname{Spec} \mathfrak{o}$ *tels que* $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q}) = \theta$ *et les composés*

$$Gr_{i+n} R_{p_v}(\mathfrak{M} \otimes \kappa_v) \circ \cdots \circ Gr_i R_{p_v}(\mathfrak{M} \otimes \kappa_v)$$

*s'annulent. Alors ces composés s'annulent pour tout* $v$ *tel que* $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q}) = \theta$ *. En particulier, si* $k$ *est un corps de nombres, l'ensemble de ces places* $v$ *a une "densité" au sens de* 5.1 *qui est un nombre rationnel.*

En revanche, nous ne savons pas ce qu'il en est de la nilpotence d'échelon $n$ des $p$-courbures elles-mêmes (sans passer aux gradués). Cela irait dans le sens de la conjecture 5.2.4.

2) *Un peu d'effectivité :* on peut grouper les applications (potentielles) de la conjecture de Grothendieck en deux champs :

i) les applications (exceptionnelles) où l'on connaît a priori l'existence d'une base de solutions formelles à coefficients entiers, dont on cherche à montrer l'algébricité (voir l'appendice) ;

ii) les applications où une équation différentielle est donnée (dépendant éventuellement de paramètres), dont on cherche à tester l'isotrivialité en calculant un certain nombre de $p$-courbures (voir [50]).

Les variantes de la conjecture de Grothendieck adaptées à ce second champ sont des variantes effectives : il s'agit de déterminer un entier $q = q(\mathcal{M})$ tel que si pour tout premier $p < q$ tel que la réduction de $\mathcal{M}$ modulo $p$ soit bien définie, les $p$-courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent, alors $\mathcal{M}$ est isotrivial. Pour une connexion semi-simple $\mathcal{M}$ provenant de la géométrie sur un corps de nombres $k$, la méthode ci-dessus permet en principe de déterminer un tel entier $q$. Supposons d'abord $\mathcal{M}$ de la forme $e_\chi(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f))$ comme plus haut. Soit $q'$ tel que toute place finie de $k$ de caractéristique résiduelle $> q'$ soit dans $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}$ (les conditions $(*)_{f,i}$ et $(**)_{f,i}$ étant supposées remplies). Soit d'autre part $q'' > q'$ un majorant de la hauteur (non logarithmique) de la matrice de l'application de Kodaira–Spencer de $\underline{\mathrm{End}}\mathcal{H}_f$ dans des bases convenables. Alors la nullité de cette application de Kodaira–Spencer équivaut à sa nullité modulo une quelconque place $v$ de caractéristique résiduelle $> q''$. Enfin les formes effectives du théorème de Chebotarev [41] donnent un entier $q > q''$ tel que l'intervalle $]q'', q[$ contient au moins un premier dans chaque classe de conjugaison de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. On peut alors prendre pour $q(\mathcal{M})$ cet entier $q$.

On obtiendra une variante effective de la propriété de Grothendieck–Katz pour tout facteur de $\mathcal{H}_f$, du moins sous l'hypothèse $(\bullet)$, en se ramenant à calculer les $p$-courbures de $\mathcal{M}$ pour tout facteur de $\underline{\mathrm{End}}\mathcal{H}_f$ et pour tout $p < q(\mathcal{M})$.

3) Via le corollaire 16.2.4, la conjecture de Bombieri–Dwork et la conjecture de connexité des groupes de Galois motiviques (sur $\bar{k}$) entraînent la conjecture de Grothendieck–Katz pour toute connexion intégrable. En effet, cette dernière se ramène à la conjecture de Grothendieck, dont l'hypothèse implique que la connexion en question est une $G$-connexion.

# A Conjecture de Grothendieck et théorie des champs conformes

**A.1.** L'objet de ces remarques, qui précisent la conclusion de [1], est de mettre en lumière l'intérêt de la conjecture de Grothendieck dans le problème de classification des théories conformes du champ dites rationnelles. Là se présente la situation rare de systèmes différentiels linéaires dont on sait a priori qu'ils admettent une base de solutions formelles à coefficients entiers, donc sont à $p$-courbures nulles pour tout $p$.

**A.2.** Dans le programme de classification des théories conformes en dimension 2, le domaine des théories rationnelles (RCFT) est le plus accessible. Dans ces théories apparaissent des représentations projectives de dimension finie de divers groupes de tresses ou de "mapping class groups", et l'un des problèmes qui se posent alors est celui de la finitude de l'image de ces représentations. En d'autres termes, il s'agit de déterminer quand les "blocs conformes" de la théorie sont algébriques sur les espaces de modules de courbes de genre $g$ à $N$ points marquées, pour divers $(g, N)$ ; il resterait ensuite à dresser les "listes de Schwarz" correspondantes.

Ce programme a été mené à bien dans le cas $c < 1$ ($c$ est la charge centrale qui apparaît dans le multiplicateur $e^{2\pi i c/24}$ de l'extension centrale du mapping class group, ou de l'algèbre de Virasoro intervenant), du moins pour $(g, N) = (1, 1)$, et du modèle WZNW pour $SU_2$. La "classification A.D.E." donne les valeurs $c = 1 - 6/m(m+1)$ et les multiplicités de la fonction de partition (voir la discussion de [35]).

**A.3.** Examinons le cas $(g, N) = (1, 1)$. L'espace de Hilbert $H$ des états d'une théorie conforme de charge centrale $c$ est une représentation d'un produit de deux algèbres de Virasoro, de la forme $H = \oplus_{i,j} V(h_i, c) \otimes \bar{V}(\bar{h}_j, c)$, où $V(h_i, c)$ est la représentation irréductible de plus haut poids $h_i \geq 0$ et de niveau $c$, et où les barres marquent les conjugués complexes. Les fonctions de corrélation de la théorie, et la fonction de partition en particulier $Z(t) = Trq^{L_0 - c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} = \sum_{i,j} N_{ij}\chi(h_i, c)\bar{\chi}(\bar{h}_j, c)$ sont des invariants modulaires sur le demi-plan de Poincaré ($q = e^{2\pi i \tau}$). Ce sont donc des fonctions du paramètre $\lambda = 16q^{1/2}\prod_1^\infty(\frac{1+q^n}{1+q^{n-1/2}})^8$ de Legendre. Les théories rationnelles sont caractérisées par la finitude du rang de la matrice à coefficients entiers naturels $(N_{ij})$. G. Anderson et G. Moore ont montré que $c$ et les plus hauts poids $h_i$ de l'algèbre de Virasoro sont alors rationnels [1]. Ils s'appuient sur la remarque que $Z(t)$ s'écrit comme une somme finie $f_k$, où les $f_k = N_{kj}\chi(h_k, c)$ (resp. les $g_k$) engendrent des représentations de dimension finie du groupe modulaire ; ici $\bar{g}_k = \bar{\chi}(\bar{h}_k, c) + D_{jk}\bar{\chi}(\bar{h}_j, c)$, où les coefficients $D_{jk}$ satisfont à $N_{ij} = \sum_{k=1}^{k=r} D_{jk}N_{ik}$ pour tout $i$ et tout $j > r$. Il en découle que, vu comme fonction holomorphe multiforme en la variable $\lambda$, le vecteur $\vec{f}$ (resp.$\vec{g}$) de composantes les $f_k$ (resp.$g_k$) vérifie un système différentiel linéaire sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

**A.4.** En choisissant $r$ assez grand, on peut supposer que les $D_{jk}$ sont entiers. Il en découle que les développements de Puiseux en la variable $q$ des fonctions $f_k$ et $g_k$ sont à coefficients entiers. Comme $q^{1/2}$ et $\lambda/16$ s'expriment mutuellement comme séries à coefficients entiers l'un de l'autre, on en déduit, via la proposition 5.3.3, que les systèmes différentiels satisfaits par $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont à $p$-courbures nulles pour presque tout $p$. Que les $f_k$ et $g_k$ soient des fonctions algébriques de la variable $\lambda$ découlerait donc de la conjecture de Grothendieck.

**A.5.** En fait, cette situation représente un cas très spécial d'application de la conjecture de Grothendieck : c'est le cas limite du critère 5.4.5 dans lequel *il existe une uniformisation v-adique simultanée de* $\vec{f}, \vec{g}$, *et* $x = \lambda$ *dans un disque* $D(0, R_v)$, *avec* $\prod R_v = 1$ (au lieu de $\prod R_v > 1$). Notons que ce critère ne s'étend pas sans restriction à ce cas limite, comme le montre l'exemple de la fonction hypergéométrique $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x)$ (uniformisation par les fonctions thêta, cf. [5]). Il faut donc tenir compte en outre de ce que les monodromies locales sont semi-simples dans la situation (du fait que les $p$-courbures sont presque toutes nulles). Cela suggère de rechercher des uniformisations de norme $> 1$ de (produits de) surfaces de Riemann compactes par des (poly)disques unité.

## Références


[1] Anderson, G., Moore, G., Rationality in conformal field theory. *Commun. Math. Phys.* **117** (1988), 441–450.

[2] André, Y., Quatre descriptions des groupes de Galois différentiels. In *Séminaire d'algèbre* (M.-P. Malliavin, ed.), Lecture Notes in Math. 1296, Springer-Verlag, Berlin 1986, 28–41.

[3] André, Y., *G-functions and Geometry*. Aspects of Math. E13, Vieweg, Braunschweig 1989.

[4] André, Y., Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part. *Compositio Math.* **82** (1992), 1–24.

[5] André, Y., $G$-fonctions et transcendance. *J. Reine Angew. Math.* **476** (1996), 95–125.

[6] André, Y., Pour une théorie inconditionnelle des motifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **83** (1996), 5–49.

[7] André, Y., Sur la conjecture de Grothendieck-Katz. manuscrit (1997).

[8] André, Y., Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **34** (2001), 685–739.

[9] André, Y., Baldassarri, F., Geometric theory of $G$-functions. In *Proceedings of the Conference in Arithmetic Geometry, Cortona*, 17–21 October 1994, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[10] André, Y., Baldassarri, F., *De Rham cohomology of differential modules on algebraic varieties*. Progr. Math. 189, Birkhäuser, Basel 2000.

[11] Beauville, A., Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d'après A. Bolibruch). Exp. 765, Séminaire Bourbaki, Mars 1993.

[12] Belyi, G., On Galois extensions of the maximal cyclotomic field. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** 2 (1979) 269–276.

[13] Berthelot, P., Ogus, A., *Notes on crystalline cohomology*. Math. Notes 21, Princeton University Press, Princeton, N.J, 1978.

[14] Bertrand, D., Groupes algébriques et équations différentielles linéaires. Exp. 750, Sém. Bourbaki (Fév. 1992).

[15] Bost, J.-B., Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **93** (2001), 161–221.

[16] Bost, J.-B., Germs of analytic varieties in algebraic varieties: canonical metrics and arithmetic algebraization theorems. In *Geometric Aspects of Dwork Theory* (A. Adolphson, F. Baldassarri, P. Berthelot, N. Katz and F. Loeser, eds.), Volume I, Walter de Gruyter, Berlin 2004, 371–418.

[17] Chambert-Loir, A., Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne. Exp. 886, Sém. Bourbaki (2001).

[18] Chudnovsky, D., Chudnovsky, G., Applications of Padé approximations to the Grothendieck conjecture on linear differential equations. In *Number theory,* Lecture Notes in Math. 1135, Springer-Verlag, Berlin 1985, 52–100.

[19] Curtis, C., Reiner, I., *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Interscience, 1962.

[20] Deligne, P., Théorie de Hodge II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **40** (1971), 5–57.

[21] Deligne, P., Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift*, vol. 2, Progr. Math. 87, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, 111–198.

[22] Demazure, M., Gabriel, P., *Groupes algébriques 1*. North Holland, Amsterdam 1970.

[23] Di Vizio, L., Sur la théorie géométrique des $G$-fonctions (le théorème de Chudnovsky à plusieurs variables). *Math. Ann.* **319** (2001), 181–213.

[24] Di Vizio, L., On the arithmetic size of linear differential equations. *J. Algebra* **242** (2001), 31–59.

[25] Di Vizio, L., Arithmetic theory of $q$-difference equations. The $q$-analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on $p$-curvatures. *Invent. Math.* **150** (2002), 517–578.

[26] Dwork, B., On the rationality of the zeta function of an algebraic variety. *Amer. J. Math.* **82** (1960), 631–648.

[27] Dwork, B., Arithmetic theory of differential equations. In *Symposia Mathematica XXIV*, Academic Press, London, New York 1981, 225–243.

[28] Dwork, B., Differential operators with nilpotent $p$-curvature. *Amer. J. Math.* **112** (1990), 749–786.

[29] Dwork, B., On the size of differential modules. *Duke Math. J.* **96** (1999), no.2, 225–239.

[30] Dwork, B., Gerotto, G., Sullivan, F., *An introduction to G-functions*. Ann. of Math. Stud. **133**, Princeton, 1994.

[31] Elkies, N., The existence of infinitely many supersingular primes for every elliptic curve over $\mathbb{Q}$, *Invent. Math.* **89** (1987). 561–567.

[32] Gray, J., *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*. Birkhäuser, Boston 1986.

[33] Honda, T., Algebraic differential equations. In *Symposia Mathematica XXIV*, Academic Press, London, New York 1981, 169–204.

[34] Hrushovsky, E., Computing the Galois group of a linear differential equation. Manuscrit.

[35] Itzykson, C., From the harmonic oscillator to the A-D-E classification of conformal models. In *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, Adv. Stud. Pure Math. 19, Academic Press, London, New York 1989, 287–346.

[36] Jordan, C., Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique (1878). Oeuvres II, 13–140.

[37] Katz, N., Nilpotent connections and the monodromy theorem. Applications of a result of Turrittin, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **39** (1970), 175–232.

[38] Katz, N., Algebraic solutions of differential equations ($p$-curvature and the Hodge filtration). *Invent. Math.* **18** (1972), 1–118.

[39] Katz, N., A conjecture in the arithmetic theory of differential equations. *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), 203–239 ; Corrig. : *Bull. Soc. Math. France* **111**, 347–348.

[40] Katz, N., On the calculation of some differential Galois groups. *Invent. Math.* **87** (1987), 13–61.

[41] Lagarias, J. C., Odlyzko, A., Effective versions of the Chebotarev density theorem. In *Algebraic number fields*, Proc. Durham Symp. (1977), 409–464.

[42] Landau, E., Eine Anwendung des Eisensteinsche Satz auf die Theorie der Gaussche Differentialgleichung. *J. Reine Angew. Math.* **127** (1904), 92–102.

[43] Mathieu, O., Équations de Knizhnik-Zamolodchikov et théorie des représentations. Sém. Bourbaki. Exp. 777, nov. 1993.

[44] Ogus, A., F-crystals and Griffiths transversality. In *International Symposium on Algebraic Geometry* (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya, Tokyo 1978, 15–44.

[45] Ogus, A., Hodge cycles and crystalline cohomology. In *Hodge cycles, Motives and Shimura varieties* (P. Deligne et al, eds.). Lecture Notes in Math. 900, Springer-Verlag, Berlin 1982, 357–414.

[46] Serre, J.-P., *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris 1959.

[47] Serre, J.-P., Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations $\ell$-adiques. In *Motives*, Proc. Symp. Pure Math. **55**, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 377–400.

[48] Shimura, G., Moduli and fibre systems of abelian varieties. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups* Proc. Symp. Pure Math. **9**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, 312–332.

[49] Simpson, C., Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **79** (1994), 47–129 ; II, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **80** (1995), 5–75.

[50] Van der Put, M., Reduction modulo $p$ of differential equations. *Indag. Math.* **7** (3) (1996), 367–387.

Yves André, Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France

E-mail: `Yves.Andre@ens.fr`