C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, Série I, p. 617-619, 1992

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Équations de Picard-Fuchs et invariants des courbes de genre 2

François FOUCAULT

Résumé – On donne une construction explicite de la connexion de Gauss-Manin pour les courbes hyperelliptiques de genre 2. On en déduit une forme explicite de l'application de Kodaira-Spencer en termes d'expressions liées aux invariants d'Igusa.

Picard-Fuchs equations and invariants of curves of genus two

Abstract – *We give an explicit construction of the Gauss-Manin connection for hyperelliptic curves of genus two. We deduce an explicit form of the Kodaira-Spencer map in terms of expressions connected to Igusa invariants.*

1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS. – Posons $k=\mathbf{C}(t)$. Soit X une courbe algébrique projective non singulière, de genre 2, admettant pour modèle (singulier) dans $\mathbf{P}_k^2$ la courbe X_0 d'équation affine :

$$y^2=x^5+\sum_{i=0}^{3} a_i x^i=P_5(x),$$

où les a_i sont dans k. Soit Δ le discriminant de $P_5(x)$. On désigne par $H_{DR}^1(X/k)$ le k-espace vectoriel quotient de l'espace $D_2(X)$ des différentielles de deuxième espèce par le sous-espace $d(k(X))$ des formes exactes. L'espace Ω des différentielles de première espèce s'identifie canoniquement à un sous-espace de $H_{DR}^1(X/k)$. Comme X est de genre 2, on a : $\dim_k(\Omega)=2$ et $\dim_k(H_{DR}^1(X/k))=4$. Soit ∂ la dérivation de k telle que $\partial t=1$ et de corps des constantes $\mathbf{C}$; on notera ∂_X la connexion canonique de $H_{DR}^1(X/k)$ déduite de ∂ par la construction de Manin [5]. Si α est une différentielle de deuxième espèce sur X, on note $[\alpha]$ la classe dans $H_{DR}^1(X/k)$ de α.

La théorie des invariants des quintiques (*cf.* [2]) suggère de munir x, y, (dx/y), a_0, a_1, a_2, a_3 et Δ des poids respectifs : 2, 5, -3, 10, 8, 6, 4 et 40. On munira de plus formellement les dérivations ∂ et ∂_X du poids 2.

On pose enfin : $k_1=5a_0\partial a_3-2a_3\partial a_0$, $k_2=2a_1\partial a_3-a_3\partial a_1$ et $k_3=3a_2\partial a_3-2a_3\partial a_2$.

2. ÉNONCÉ DU THÉORÈME ET ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION. – Soit B la base de $H_{DR}^1(X/k)$ définie par les différentielles $\omega_1=dx/y$, $\omega_2=x\omega_1$, de première espèce, et $\eta_1=x^2\omega_1$, $\eta_2=x^3\omega_1$, de deuxième espèce. Soit M la matrice de ∂_X dans la base B. Écrivons-la sous la forme :

$$M=-1/(2\Delta)\begin{pmatrix} A_{i,j} & B_{i,j} \\ C_{i,j} & D_{i,j} \end{pmatrix} \qquad (i,j=1,2).$$

THÉORÈME. – *Les coefficients* $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ *sont des polynômes explicitement calculables en les* a_i *et les* $\partial(a_i)$ $(i=0,\ldots,3)$ *à coefficients dans* $\mathbf{Z}$, *linéaires en les* $\partial(a_i)$, *isobares, de degré majoré par* 8 *en les* a_i, *et dont les coefficients sont en valeur absolue inférieurs à* 10^4.

De plus, les expressions $2a_3B_{i,j}$ *sont des polynômes en les* a_i *et les* k_i, *linéaires en les* k_i, *dont les coefficients divisent* $2^6\,3^4\,5^4\,7.11.13.17.19$.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0764-4442/92/03140617 $ 2.00

On obtient les $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ par un algorithme dont l'implémentation a été faite par Ph. Toffin (*voir* [6]).

On trouvera l'expression explicite des $2a_3 B_{i,j}$ au paragraphe 3 ci-dessous.

Démonstration. — Il s'agit d'expliciter dans la base B de $H^1_{DR}(X/k)$ l'image des éléments de B par ∂_X. Pour cela, nous calculons dans $D_2(X)$ leurs images par le représentant $\partial = \partial_x$ de ∂_X défini par $\partial(x)=0$.

Le théorème de Riemann-Roch, et l'action de l'involution hyperelliptique montrent que les différentielles $\partial_x(\omega_i)$ et $\partial_x(\eta_i)$ s'expriment en fonction des ω_i, des η_i et des différentielles $\theta_j = (x^j/y^2)\omega_1$ $(j=0, \ldots, 4)$ [les coefficients sont dans le $\mathbf{Z}[a_i]_i$-module engendré par les $\partial(a_i)$]. Or il est facile d'écrire θ_j en fonction des ω_i, des η_i, et de différentielles exactes, ce qui fournit une forme explicite de la matrice M.

Remarque. — L'introduction des θ_j généralise un procédé de Klein ([4], p. 30).

On dispose également d'un résultat du même type pour les équations $y^2 = P_6(x)$ (*voir* [1]).

3. Application de Kodaira-Spencer et invariants d'Igusa. — Suivant une construction classique (Katz [3], prop. I.4.1.7), on peut interpréter l'application de Kodaira-Spencer comme l'homomorphisme k-linéaire de $\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(k)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}_k(\Omega, H^1_{DR}(X/k)/\Omega)$, représenté dans les bases $([\omega_1], [\omega_2])$, $([\eta_1] \bmod (\Omega), [\eta_2] \bmod (\Omega))$ par la matrice $(B_{i,j})_{(i,j=1,2)}$ du théorème 1.

En voici l'expression :

$$\begin{aligned} 2a_3 B_{1,1} &= J_{26} k_1 + 4 J_{28} k_2 + J_{30} k_3, \\ a_3 B_{1,2} &= 3(J_{24} k_1 + J_{26} k_2 + J_{28} k_3), \\ a_3 B_{2,1} &= J_{28} k_1 + J_{30} k_2 + J_{32} k_3, \\ B_{2,2} &= 3 B_{1,1}, \end{aligned}$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} J_{24} = {} & -5^3 a_3 a_0^2 + 2^3 5 a_3^2 a_2 a_0 + 2^2 a_2^3 a_2^2 - 3^2 13 a_3 a_2^2 a_1 \\ & + 2^3 11 a_3^2 a_1^2 + 3^3 a_2^4 + 2^2 . 3 . 5^2 a_2 a_1 a_0 - 2^5 5 a_1^3 - 2^2 3 a_3^4 a_1, \\ J_{26} = {} & 2^4 5^2 a_1^2 a_0 - 2^2 a_3^3 a_2 a_1 - 2^2 5 . 13 a_3^2 a_1 a_0 - 3^3 a_2^3 a_1 \\ & - 3 . 5^3 a_2 a_0^2 + 3 . 5 . 13 a_3 a_2^2 a_0 + 2^4 3 a_3 a_2 a_1^2 + 2^2 3^2 a_3^4 a_0, \\ J_{28} = {} & -2 . 5^3 a_1 a_0^2 - 2^2 3 a_3^3 a_2 a_0 + 3 . 5^2 a_3^2 a_0^2 + 2 . 3^2 a_2^2 a_1^2 \\ & - 3^2 5 a_2^3 a_0 + 2 . 5 a_3 a_2 a_1 a_0 - 2^4 a_3 a_1^3 + 2^2 a_3^3 a_1^2, \\ J_{30} = {} & 3 . 5 . 11 a_2^2 a_1 a_0 + 5^4 a_0^3 - 5^2 17 a_3 a_2 a_0^2 + 2^4 5 a_3 a_1^2 a_0 \\ & - 2^4 3 a_2 a_1^3 - 2^2 3 a_3^3 a_1 a_0 - 2^2 a_3^2 a_2 a_1^2 + 2^4 a_3^2 a_2^2 a_0, \\ J_{32} = {} & -3^2 5 a_3^3 a_0^2 - 2^2 3 a_3 a_2^3 a_0 + 3 a_3 a_2^2 a_1^2 - 2^2 5 . 7 a_2 a_1^2 a_0 \\ & + 2^5 a_1^4 - 2^3 a_3^2 a_1^3 + 2 . 19 a_3^2 a_2 a_1 a_0 + 3 . 5^2 a_2^2 a_0^2 + 5^2 7 a_3 a_1 a_0^2. \end{aligned}$$

[La matrice représentative n'est pas symétrique, car la base $([\eta_1] \bmod (\Omega), [\eta_2] \bmod (\Omega))$ n'est pas duale de la base $([\omega_1], [\omega_2])$ pour l'accouplement canonique entre Ω et $H^1_{DR}(X/k)/\Omega$.] En fait, la base duale est donnée par les classes des différentielles : $\eta_1^* = -(3/4)\eta_2$ et $\eta_2^* = -(1/4)\eta_1$].

Comme il est bien connu, l'application de Kodaira-Spencer est nulle si et seulement si X est isoconstante. Nous nous proposons de vérifier ceci à partir des expressions précédentes.

PROPOSITION. — *La matrice* $(B_{i,j})_{(i,j=1,2)}$ *est nulle si et seulement si :* $k_1=k_2=k_3=0$.

Démonstration. — D'après les expressions précédentes, si les k_i sont nuls, on a : $B_{i,j}=0$. Réciproquement, $(B_{i,j})=0$ signifie que $\partial_X(\Omega)\subseteqq\Omega$. En écrivant, comme dans la démonstration du théorème, que $\partial_x(\omega_1)$ et $\partial_x(\omega_2)$ sont, à des formes exactes près, dans Ω, on obtient un système d'équations linéaires dont la compatibilité implique $k_i=0\,(i=1, 2, 3)$.

De la nullité des k_i, on déduit alors que les expressions a_3^5/a_0^2, a_3^2/a_1, a_3^3/a_2^2 sont constantes. En d'autres termes, les invariants J_4/J_2^2, J_6/J_2^3, Δ/J_2^5 d'Igusa ([2], p. 623) sont constants. Or cette dernière condition est équivalente au fait que la courbe X est isomorphe, sur une extension finie de k, à une courbe constante.

Remarque. — Tout ce qui précède reste vrai si on remplace **C** par un corps k_0 de caractéristique différente de 2, 3, et 5.

Note remise le 20 novembre 1991, acceptée le 18 décembre 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] F. FOUCAULT, Equations de Picard-Fuchs effectives, *Séminaire de théorie des Nombres*, Caen, 1990.

[2] J. IGUSA, Arithmetic Variety of Moduli for Genus Two, *Annals of Math.*, 72, 1960, p. 612-649.

[3] N. KATZ, Algebraic Solutions of Differential Equations, *Invent. Math.*, 18, 1972.

[4] F. KLEIN, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, 1, Leipzig, 1892, p. 30.

[5] Yu I. MANIN, Algebraic Curves over Function Fields with differentiation, *Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat.*, 22, 1958, p. 737-756 (=*A.M.S. Transl.* (2), 37, p. 59-78).

[6] Ph. TOFFIN, *Implémentation des algorithmes « Picard-Fuchs* (genre 2) », Maple, Caen, 1990-1991.

9, *quai Meslin*, 14000 *Caen*.